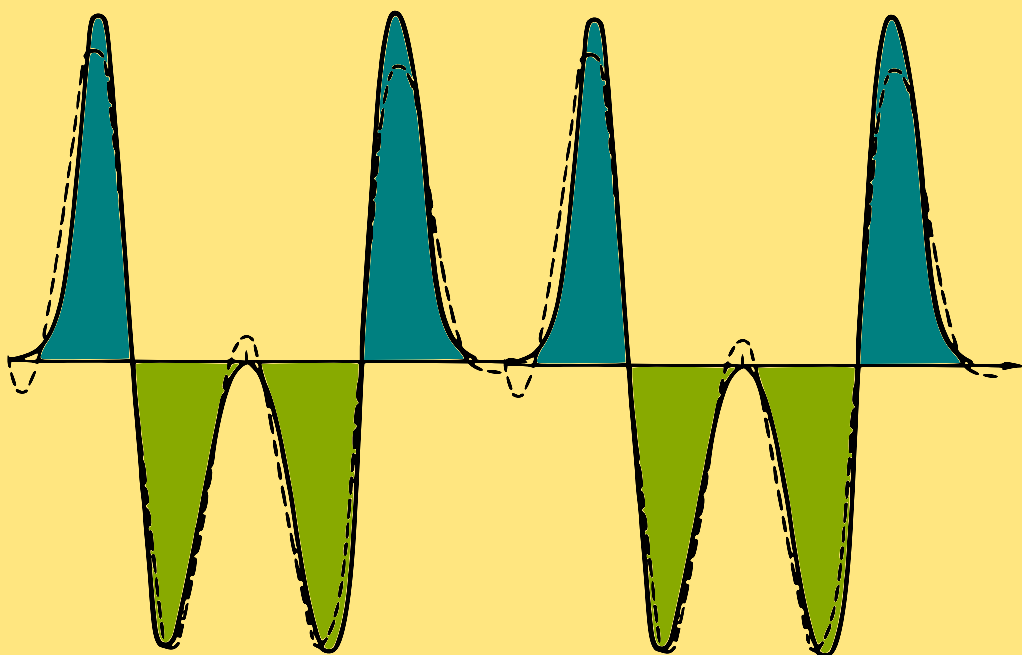
A. Tikhonov, V. Arsénine

Méthodes de Résolutions des Problèmes mal Posés



Éditions Mir Moscou

А. ТИХОНОВ, В. АРСЕНИН

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» • 1974

A. TIKHONOV, V. ARSÉNINE

MÉTHODES DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MAL POSÉS

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par *Vladimir Kotliar*

На французском языке

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Parmi les problèmes mathématiques, on distingue une classe de problèmes dont les solutions sont instables vis-à-vis de faibles variations des données initiales: quelque petite que soit la variation des données initiales, elle risque d'amener des variations aussi grandes que l'on veut de la solution. On dit alors que le problème est mal posé.

Cette instabilité, lorsque les données initiales ne sont connues qu'avec un certain degré d'approximation, fait que la solution approchée s'avère être non unique (dans les limites de précision que l'on s'est fixées) et qu'elle est difficile à interpréter. En raison de ces inconvénients, on persistait à croire qu'un problème mal posé était dépourvu de toute utilité pratique.

On connaît cependant bon nombre de problèmes mal posés, appartenant tant aux mathématiques classiques qu'à des branches appliquées les plus diverses et dont l'importance pratique est incontestable. Cela donne une idée du caractère vraiment universel de la classe de problèmes considérée. Déjà en regardant les titres des divisions et les exemples proposés dans ce livre, l'on se rend compte de la largeur de cette classe et de la multiplicité des utilisations possibles. Parmi les problèmes d'importance particulière, signalons les questions liées à la mise au point des systèmes automatiques de traitement mathématique des résultats des expériences (l'interprétation y comprise), les problèmes de la commande optimale et l'établissement de projets optimaux de systèmes.

Une étape essentielle du traitement des données expérimentales est la résolution de problèmes instables vis-à-vis de faibles variations des données initiales: aussi l'importance des méthodes de résolution de pareils problèmes ne saurait-elle être mise en doute. On demande par ailleurs que les solutions approchées obtenues en partant des données initiales approchées soient insensibles aux faibles variations de ces dernières.

Au cours de ces dernières années, on a vu paraître dans différentes revues scientifiques un grand nombre de travaux consacrés à ces questions. On attendait un livre qui, entièrement consacré aux

méthodes de résolution de problèmes mal posés, pût initier un auditoire plus large aux idées et questions relatives à la construction des solutions de ces problèmes. Tel est justement le but que nous poursuivons en soumettant aujourd'hui le fruit de nos efforts à l'attention du lecteur.

On sait que les données initiales de problèmes mal posés, obtenues le plus souvent comme résultats de mesures, sont entachées d'erreurs accidentelles. Pour cette raison, la construction des solutions approchées et l'estimation de l'erreur qui leur est propre sont possibles tant par application d'un principe déterministe que d'un principe probabiliste, ceci selon la nature de l'information disponible à l'origine. Dans ce livre, nous nous bornons en général au principe déterministe (sauf dans les chapitres IV et V). Le principe probabiliste est traité, par exemple, dans [63, 64, 87, 100, 105, 124, 128, 129, 179 à 181, 184, 217].

Nous proposons ici, pour la construction des solutions de problèmes mal posés, une méthode de régularisation que nous avons avancée auparavant dans [156 à 161].

Nous n'avons pas cherché à faire la revue de toute la littérature parue à ce jour consacrée aux problèmes mal posés: le lecteur trouvera une bibliographie complète, par exemple, dans [122].

Ce livre est destiné aux étudiants et boursiers de thèse en physique et mathématique, ainsi qu'aux ingénieurs et chercheurs intéressés par les questions du traitement et de la planification des expériences. Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance à A. Loukchine pour ses abondantes et précieuses observations.

Acad. A. Tikhonov,

prof. V. Arsénine

INTRODUCTION

§ 1. Sur quelques aspects de la position de problèmes mathématiques

1. La résolution de classes assez vastes de problèmes sur ordinateurs est inconcevable sans le développement des algorithmes de calcul appropriés. Or, que signifie « résoudre un problème »? A quelles conditions doivent satisfaire les algorithmes employés pour la recherche de la « solution »?

Les conceptions et positions classiques de problèmes ne tiennent pas compte de nombreuses particularités des problèmes auxquels on a affaire en pratique. Nous allons le montrer à l'aide de quelques exemples.

2. Exemple 1. Considérons une équation intégrale de Fredholm de première espèce à noyau $K(x, s)$:

$$\int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds = u(x), \qquad c \leqslant x \leqslant d, \qquad (0;\ 1,1)$$

où $z(s)$ est une fonction inconnue de l'espace F; $u(x)$ est une fonction donnée de l'espace U. Nous admettrons que le noyau $K(x, s)$ est une fonction continue de x à dérivée partielle continue $\partial K/\partial x$. Pour abréger l'écriture, l'opérateur $\int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds$ sera désigné aussi par Az.

La solution $z(s)$ sera cherchée dans la classe des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. L'écart du second membre sera estimé dans une métrique quadratique, c'est-à-dire par la formule

$$\rho_U(u_1, u_2) = \left\{ \int_c^d [u_1(x) - u_2(x)]^2\, dx \right\}^{1/2}$$

(métrique de L_2), et l'écart de la solution $z(s)$, dans une métrique uniforme, c'est-à-dire par la formule

$$\rho_F(z_1, z_2) = \max_{s \in [a, b]} |z_1(s) - z_2(s)|$$

(métrique de C).



3. Supposons que pour un second membre $u = u_1(x)$ la fonction $z_1(s)$ soit solution de l'équation (0; 1,1), en sorte que

$$\int_a^b K(x, s)\, z_1(s)\, ds \equiv u_1(x).$$

Si on ne connaît pas la fonction $u_1(x)$ mais seulement son approximation $u(x)$, peu différente (dans la métrique de L_2) de $u_1(x)$, on ne peut chercher qu'une « solution » de (0; 1,1) voisine de $z_1(s)$.

Le second membre $u(x)$ s'obtient souvent par voie expérimentale, par exemple à l'aide d'un instrument enregistreur, et présente des points « anguleux » en lesquels la fonction $u(x)$ n'admet pas de dérivée. S'il en est ainsi, l'équation (0; 1,1) n'a pas de solution (au sens classique), car le noyau $K(x, s)$ admettant une dérivée continue par rapport à x, le second membre doit également en admettre une.

On ne peut donc adopter en tant que « solution » voisine de $z_1(s)$ de l'équation (0; 1,1) la solution exacte de cette équation à second membre approché $u(x) \neq u_1(x)$, car il est fort probable que cette solution n'existe pas. Il se pose là une question de principe: que doit-on entendre par solution « approchée » de l'équation (0; 1,1) à second membre connu approximativement?

De toute évidence, l'équation (0; 1,1) n'admet de solution (au sens classique) que pour les seconds membres $u(x)$ appartenant à l'image AF de l'ensemble F des fonctions $z(s)$ par l'application

$$u = Az \equiv \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds, \qquad z(s) \in F.$$

4. Remarquons en outre que la solution de l'équation (0; 1,1), interprétée au sens classique, c'est-à-dire recherchée par la règle

$$z = A^{-1}u,$$

où A^{-1} est l'inverse de l'opérateur A de (0; 1,1), n'est pas stable vis-à-vis de faibles variations des « données initiales » (du second membre $u(x)$).

En effet, la fonction $z_2(s) = z_1(s) + N \cdot \sin \omega s$ est solution de l'équation (0; 1,1) à second membre

$$u_2(x) = u_1(x) + N \int_a^b K(x, s) \sin \omega s\, ds.$$

Evidemment, pour tout N, et à condition que ω soit suffisamment élevé, on peut faire l'écart

$$\rho_U(u_1, u_2) = |N| \left\{ \int_c^d \left[\int_a^b K(x, s) \sin \omega s\, ds \right]^2 dx \right\}^{1/2}$$

aussi petit que l'on veut, tandis que l'écart des solutions correspondantes $z_1(s)$ et $z_2(s)$ sera égal à

$$\rho_F(z_1, z_2) = \max_{s\in[a,\, b]} |z_2(s) - z_1(s)| = \max_{s\in[a,\, b]} |N \sin \omega s| = |N| \quad (0\,;\, 1,\, 2)$$

et pourra être arbitrairement grand. L'évaluation des écarts des fonctions $z_1(s)$ et $z_2(s)$ a été faite dans la métrique de C.

Si l'on se propose d'évaluer l'écart des solutions dans la métrique de L_2, il s'avérera que la solution de l'équation (0; 1,1) est aussi instable vis-à-vis de faibles variations du second membre $u(x)$. En effet,

$$\rho_F(z_1, z_2) = \left\{ \int_a^b |z_1(s) - z_2(s)|^2 ds \right\}^{1/2} = |N| \left\{ \int_a^b \sin^2 \omega s \, ds \right\}^{1/2} =$$
$$= |N| \sqrt{\frac{b-a}{2} - \frac{1}{2\omega} \sin \omega(b-a) \cos \omega(b+a)}. \quad (0\,;\, 1,\, 3)$$

On voit sans peine qu'on peut choisir les nombres ω et N tels que pour des écarts aussi petits que l'on veut des seconds membres $u_1(x)$ et $u_2(x)$, l'écart des solutions respectives calculé par la formule (0; 1,3) soit arbitrairement grand.

Il faut cependant que la solution de l'équation (0; 1,1) soit stable; cela tient à ce que le phénomène (liaison) défini par cette équation est physiquement déterminé.

La recherche de la solution de l'équation intégrale (0; 1,1) constitue un problème incomplètement déterminé si l'on adopte en qualité de sa solution approchée la fonction $z(s)$ pour laquelle

$$\rho_U(Az, u) \leqslant \delta,$$

u approchant le second membre de l'équation à δ près, $\rho_U(u, u_1) \leqslant \delta$.

Ainsi donc, il s'agit non seulement de savoir ce qu'est la « solution » approchée de l'équation (0; 1,1), mais aussi d'indiquer un algorithme de construction de la solution stable vis-à-vis de faibles variations des « données initiales » $u(x)$.

La situation que l'on vient d'examiner est typique pour les problèmes mal posés.

5. Nous venons de considérer le cas où l'on sait que la solution exacte (au sens classique) $z_{ex}(s)$ de l'équation (0; 1,1) répondant au second membre $u_{ex}(x)$ existe; on demande de chercher une approximation de cette solution, ne connaissant pas la fonction $u_{ex}(x)$ mais seulement son approximation $u(x)$ telle que $\rho_U(u_{ex}, u) \leqslant \delta$.

Si l'on ne peut rien dire sur l'existence de la solution exacte de (0; 1,1), mais que l'on dispose en revanche de l'information sur la classe des seconds membres possibles U, on peut également se proposer de rechercher la « solution » approchée de l'équation (0; 1,1).

Définissons la notion de solution généralisée (quasi-solution) de l'équation (0; 1,1) sur un ensemble F comme étant un élément $\tilde{z}$ de F tel que la distance $\rho_U\,(Az, u)$ y atteigne sa borne inférieure exacte [71, 72], c'est-à-dire que

$$\rho_U(A\tilde{z}, u) = \inf_{z \in F} \rho_U(Az, u), \quad Az \equiv \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds.$$

Il est évident que si pour $u = u_{ex}$ l'équation (0; 1,1) admet une solution triviale $z_{ex} \in F$, celle-ci se confond avec la solution généralisée de l'équation $Az = u_{ex}$.

Se pose alors le problème de trouver les algorithmes de construction de solutions généralisées tels qu'ils soient stables vis-à-vis de faibles variations du second membre $u(x)$.

E x e m p l e 2. Soit un système d'équations algébriques linéaires

$$Az = u, \qquad (0;\ 1,4)$$

où z est un vecteur inconnu, u un vecteur connu, $A = \{a_{ij}\}$ une matrice carrée d'éléments a_{ij}.

Si le système (0; 1,4) est non dégénéré, c'est-à-dire si $\det A \neq 0$, il n'admet qu'une solution unique, qu'on trouve facilement à l'aide des formules connues de Cramer, ou bien par d'autres méthodes *).

Lorsque le système (0; 1,4) est dégénéré, il n'admet une solution (qui n'est pas unique) que sous certaines conditions de solubilité, impliquant notamment la nullité des déterminants correspondants.

Ainsi donc, avant de résoudre le système (0; 1,4), il faut voir s'il est dégénéré ou non. On calcule pour cela le déterminant $\det A$ du système.

Si n est l'ordre du système, le calcul de $\det A$ se fait à peu près en n^3 opérations. Aussi poussée que soit la précision du calcul, on risque néanmoins d'avoir pour un n assez élevé une valeur de $\det A$ arbitrairement différente de la valeur réelle, à cause d'accumulation d'erreurs de calcul. On est amené donc à chercher des algorithmes de construction de la solution du système (0; 1,4) qui n'exigent pas de savoir à l'avance si le système (0; 1,4) est dégénéré ou non.

En outre, souvent dans les problèmes pratiques le second membre u et les éléments de la matrice A, c'est-à-dire les coefficients du système d'équations (0; 1,4), ne sont connus que d'une façon approximative. Alors à la place du système (0; 1,4) on a affaire à un autre système, $\tilde{A}z = \tilde{u}$, tel que $\| \tilde{A} - A \| \leqslant \delta$, $\| \tilde{u} - u \| \leqslant \delta$, la signification des normes étant généralement suggérée par la nature du problème. Etant amené à considérer au lieu de la matrice A la matrice

*) A. Kurosh, *Cours d'algèbre supérieure*. Editions MIR, Moscou, 1973.

$\tilde{A}$, on est *a fortiori* dans l'impossibilité de dire avec certitude si le système (0; 1,4) est dégénéré ou non.

Dans ces cas la seule chose que l'on connaît sur le système exact $Az = u$ est que la matrice A et le second membre u vérifient les inégalités $\| \tilde{A} - A \| \leqslant \delta$ et $\| \tilde{u} - u \| \leqslant \delta$. Or, les systèmes répondant à de telles données initiales (A, u) sont infiniment nombreux; ils sont indiscernables dans un intervalle d'erreurs fixé. Parmi de tels « systèmes exacts possibles » certains peuvent être dégénérés.

Puisqu'on ne connaît pas le système exact (0; 1,4) mais un système approché $\tilde{A}z = \tilde{u}$, on ne peut chercher qu'une solution également approchée. Il se peut cependant que le système approché s'avère être irrésoluble. La question se pose: que doit-on entendre par solution approchée du système (0; 1,4)? Remarquons qu'elle doit être stable vis-à-vis de faibles variations des données initiales (A, u).

§ 2. Notion de problèmes bien posés et mal posés

1. On distingue les problèmes bien posés et les problèmes mal posés. C'est à Jacques Hadamard [201, 202] que nous devons la notion de « problème correctement posé » introduite pour des besoins de la physique mathématique dans le but de savoir quels types de conditions aux limites sont les plus naturels pour différents types d'équations différentielles (par exemple, pour les équations elliptiques, c'est le problème de Dirichlet et les problèmes analogues; pour les équations hyperboliques, c'est le problème de Cauchy).

Résoudre un problème numérique c'est trouver sa « solution » z à partir des « données » ou « conditions initiales » u, $z = R(u)$. Nous allons les assimiler aux éléments d'espaces métriques U et F avec les distances entre éléments $\rho_U(u_1, u_2)$, $\rho_F(z_1, z_2)$; $u_1, u_2 \in U$; $z_1, z_2 \in F$. La métrique est généralement déterminée par la position du problème.

2. Supposons que la notion de « solution » soit définie et qu'à tout élément $u \in U$ réponde une solution unique $z = R(u)$ de l'espace F.

On dit que le problème de recherche de la solution $z = R(u)$ de l'espace F à partir des données initiales $u \in U$ est *stable sur les espaces* (F, U) si pour tout $\varepsilon > 0$ on a un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que l'inégalité $\rho_U(u_1, u_2) \leqslant \delta(\varepsilon)$ implique $\rho_F(z_1, z_2) \leqslant \varepsilon$, où $z_1 = R(u_1)$, $z_2 = R(u_2)$; $u_1, u_2 \in U$; $z_1, z_2 \in F$.

Le problème qui consiste à trouver la solution z de l'espace F à partir des « données initiales » u de l'espace U est dit *bien posé*

(ou *correctement posé*) *sur le couple d'espaces métriques* (F, U) si les exigences (conditions) suivantes sont respectées:

1) pour tout élément $u \in U$ il existe une solution z appartenant à l'espace F;

2) la solution est définie de façon unique;

3) le problème est stable sur les espaces (F, U).

Assez longtemps, les auteurs d'ouvrages mathématiques soutenaient le point de vue selon lequel tout problème mathématique devait satisfaire aux exigences énumérées [93].

Les problèmes qui ne satisfont pas à ces exigences sont dits *mal posés* ou *incorrectement posés.*

Il est à noter que la définition des problèmes mal posés ne se rapporte qu'au *couple donné* d'espaces métriques (F, U), car, transposé dans d'autres métriques, le même problème peut s'avérer bien posé (voir exemples 2 et 3 du § 3 de l'Introduction).

Remarque. La métricité des espaces F et U est employée ici pour exprimer la proximité des éléments, comme un moyen de définition des voisinages dans les espaces F et U. Les résultats fondamentaux cités ci-dessous valent aussi pour des espaces F et U topologiques (voir [73]).

Si le choix de la classe U des données initiales est « naturel » pour le problème considéré, alors les conditions 1) et 2) caractérisent sa détermination mathématique. La condition 3) est liée à la détermination physique du problème, ainsi qu'à la possibilité d'emploi des méthodes numériques de sa résolution à partir des données initiales approchées.

En effet, quelle interprétation physique peut-on donner à la solution du problème si des perturbations aussi insignifiantes que l'on veut des données initiales peuvent amener de grandes variations de la solution?

3. On considérait souvent la position correcte de problèmes comme condition indispensable à laquelle devait être soumis tout problème mathématique correspondant à un problème concret de la physique ou de la technique. On se doutait même si les problèmes mal posés valaient la peine d'être étudiés. Cependant, un tel point de vue, naturel quand il s'agit de certains phénomènes évoluant dans le temps, ne peut être étendu à tous les problèmes. On verra au § 3 quelques exemples de problèmes mal posés, relevant tant de l'appareil principal des mathématiques que d'une vaste classe d'applications.

4. Le problème de recherche d'une solution approchée d'un problème mal posé dans la classe naturelle F d'éléments est en général non univoque.

Supposons par exemple que le problème de recherche de la solu-

tion de l'équation

$$Az = u \qquad (0;\ 2,1)$$

soit mal posé dans la classe d'éléments F *).

Supposons ensuite que le second membre de (0; 2,1) soit connu à δ près, c'est-à-dire qu'on connaisse, au lieu de sa valeur exacte u_{ex}, un élément $\tilde{u}$ tel qu'on a $\rho_U(u_{ex}, \tilde{u}) \leqslant \delta$.

Il est logique de chercher la solution approchée de l'équation (0; 2,1) dans la classe Q_δ d'éléments z pour lesquels

$$\rho_U(Az, \tilde{u}) \leqslant \delta.$$

Or, dans bien des cas, cette classe est trop vaste. Comme il a été montré à l'exemple 1 du § 1, parmi ces éléments (fonctions $z(s)$), il peut y avoir quelques-uns qui peuvent différer beaucoup les uns des autres (dans la métrique de l'espace F). Aussi tous les éléments de la classe Q_δ ne peuvent-ils pas être adoptés comme solution approchée de (0; 2,1).

On a besoin d'un principe de sélection des solutions possibles. Ce principe nécessite l'exploitation d'une information supplémentaire, en général disponible, sur la solution. L'information de cette nature peut être quantitative ou qualitative. Le recours à une information supplémentaire de caractère quantitatif nous mène à la notion de *quasi-solution* [71, 72], qui sera étudiée plus en détail au ch. I.

L'exploitation d'une information supplémentaire de caractère qualitatif (par exemple, la régularité de la solution) suggère une autre manière de construction de solutions approchées de l'équation (0; 2,1). La méthode correspondante, exposée dans les ouvrages [156 à 161], sera décrite au ch. II.

§ 3. Exemples de problèmes mal posés

1. Exemple 1. Problème de résolution de l'équation intégrale de première espèce

$$\int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds = u(x).$$

Cet exemple a été l'objet d'une étude détaillée au § 1; il a été montré que sa solution était instable vis-à-vis de faibles variations du second membre $u(x)$.

---

*) Il en sera ainsi, par exemple, quand A est un opérateur absolument continu. Son inverse A^{-1} sera, en général, non continu sur U, et la solution de (0; 2,1) ne sera pas stable vis-à-vis de faibles variations du second membre u (dans la métrique de l'espace U).

Exemple 2. Problème de dérivation d'une fonction $u(t)$ connue approximativement.

Soit $z_1(t)$ la dérivée de la fonction $u_1(t)$. La fonction $u_2(t) = u_1(t) + N \sin \omega t$ considérée dans la métrique de C diffère de $u_1(t)$ de la quantité $\rho_C(u_1, u_2) = |N|$ pour toute valeur de ω. Or, la dérivée $z_2(t) = u_2'(t)$ diffère de $z_1(t)$, dans la métrique de C, de la quantité $|N\omega|$ qui peut être arbitrairement grande, pourvu que $|\omega|$ prenne des valeurs suffisamment élevées.

Remarquons que le problème de recherche de la dérivée d'ordre n de la fonction $u(t)$ se ramène à la résolution d'une équation intégrale de première espèce:

$$\int_0^t \frac{1}{(n-1)!}(t-\tau)^{n-1} z(\tau)\, d\tau = u(t).$$

On voit donc que ce problème n'est pas stable, ce qui entraîne des complications considérables surgissant lors du calcul approché des dérivées.

Remarque 1. Il se peut que dans des métriques autres que celle de C dont on munit les ensembles F et U (ou l'un d'eux), le problème de dérivation de la fonction $u(t)$ connue approximativement s'avère être bien posé sur le couple d'espaces métriques (F, U).

Par exemple, si U est un ensemble de fonctions continûment dérivables sur l'intervalle $[a, b]$, la distance entre les fonctions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ de U étant calculée par la formule

$$\rho_U(u_1, u_2) = \sup_{t \in [a, b]} \{|u_1(t) - u_2(t)| + |u_1'(t) - u_2'(t)|\},$$

et celle entre les fonctions $z_1(t)$ et $z_2(t)$ de F étant évaluée dans la métrique de C, il est évident que le problème de dérivation sera bien posé sur un tel couple d'espaces métriques (F, U).

Or, dans des problèmes pratiques, il arrive souvent que les exigences auxquelles doivent répondre les fonctions $u(t)$ ne peuvent être vérifiées. Aussi la métrique indiquée ci-dessus de l'évaluation de l'écart des fonctions $u(t) \in U$ n'est-elle pas naturelle pour le problème de dérivation.

Exemple 3. Calcul numérique des sommes des séries de Fourier à coefficients connus approximativement dans la métrique de l_2.

Soit $f_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt$. Prenant au lieu de a_n les coefficients $c_n = a_n + \varepsilon/n$ pour $n \geqslant 1$ et $c_0 = a_0$, on obtient la série $f_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos nt$. Les coefficients de ces séries diffèrent (dans la

métrique de l_2) de la quantité

$$\varepsilon_1 = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \right\}^{1/2} = \varepsilon \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{1/2} = \varepsilon \sqrt{\frac{\pi^2}{6}},$$

qu'il est possible de faire aussi petite que l'on veut par un choix approprié de la quantité ε. D'autre part, la différence

$$f_2(t) - f_1(t) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nt$$

peut être aussi grande que l'on veut (quand $t = 0$, la dernière série diverge).

Ainsi donc, si l'écart de la somme de la série est pris dans la métrique de C, la sommation de la série de Fourier n'est pas stable.

R e m a r q u e 2. Si l'évaluation des écarts des fonctions $f(t)$ de F se fait dans la métrique de L_2, le problème de sommation des séries de Fourier à coefficients définis approximativement (dans la métrique de l_2) sera bien posé sur un tel couple d'espaces métriques (F, U).

En effet, on a en vertu du théorème de Parseval

$$\left\{ \int_0^{\pi} [f_1(t) - f_2(t)]^2 \, dt \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} (c_n - a_n)^2 \right\}^{1/2} = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

E x e m p l e 4. Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace dans le cas bidimensionnel (l'exemple cité par Hadamard [202]). Le problème consiste à trouver la solution de l'équation $\Delta u(x, y) = 0$ à partir des données initiales, c'est-à-dire la solution vérifiant les conditions

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ étant des fonctions connues.

Si l'on pose $f_1(x) \equiv 0$, $\varphi_1(x) = \frac{1}{a} \sin ax$, le problème de Cauchy a pour solution la fonction $u_1(x, y) = \frac{1}{a^2} \sin ax \operatorname{sh} ay$, $a > 0$.

Si l'on prend $f_2(x) = \varphi_2(x) \equiv 0$, le problème de Cauchy a pour solution la fonction $u_2(x, y) \equiv 0$.

Evaluant les écarts des données initiales et des solutions dans la métrique de C, on a

$$\rho_C(f_1, f_2) = \sup_x |f_1(x) - f_2(x)| = 0,$$

$$\rho_C(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \frac{1}{a}.$$

La dernière quantité peut être rendue aussi petite que l'on peut lorsque a est assez grand.

Or, l'écart des solutions

$$\rho_C(u_1, u_2) = \sup_x |u_1(x, y) - u_2(x, y)| = \\ = \sup_x \left| \frac{1}{a^2} \sin ax \operatorname{sh} ay \right| = \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ay$$

pour tout $y > 0$ fixé peut être arbitrairement grand quand a prend des valeurs suffisamment élevées.

Ce problème n'est pas stable et, donc, doit être considéré comme mal posé.

Cependant on rencontre souvent le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace dans les applications [68 à 70, 75, 84, 94, 96, 209, 211, 212]. Citons, à titre d'exemple, le problème du prolongement du potentiel de la force de pesanteur observée près de la surface du sol ($y = 0$) dans le sens des masses gravitantes *).

E x e m p l e 5. Recherche du prolongement analytique d'une fonction, connue sur une partie d'un domaine, dans le domaine tout entier.

Soit D un domaine fini, E l'arc de courbe appartenant au domaine D. Dans ce cas le problème du prolongement analytique d'une fonction définie sur l'arc de courbe E dans le domaine D tout entier est instable.

En effet, soient z_0 un point à la frontière du domaine D, dont la distance à E est $d > 0$, et $f_1(z)$ une fonction analytique dans D. La fonction $f_2(z) = f_1(z) + \frac{\varepsilon}{z - z_0}$, où ε est un nombre positif connu, est analytique dans D, elle aussi. Ces fonctions diffèrent sur l'ensemble E de la quantité $\varepsilon/(z - z_0)$ dont le module ne dépasse pas ε/d, c'est-à-dire que $|f_2(z) - f_1(z)| \leqslant \varepsilon/d$ sur l'ensemble E. On peut faire ε/d aussi petit que l'on veut par un choix convenable de la valeur de ε.

Or, dans le domaine D, la différence des fonctions $f_2(z) - f_1(z) = \varepsilon/(z - z_0)$ n'est pas bornée en module (voir aussi [78, 192, 194, 196]).

E x e m p l e 6. Problème inverse de gravimétrie. Soit un corps de densité différente de celle du milieu. On demande de savoir la forme du corps en considérant l'anomalie de gravité créée par lui à la surface du sol (voir [36 à 38, 40, 41, 148, 165]).

Supposons que le milieu sous la surface du sol ($z = 0$) soit constitué par des masses de densités connues ρ_1 et ρ_2 séparées par la frontière $z(x)$ (fig. 1).

*) Le potentiel du champ de gravitation de la Terre vérifie l'équation de Laplace $\Delta u = 0$.

Soit $\tilde{z}(x) = -H$ partout sauf sur l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$, où $\tilde{z}(x) = -H + z(x)$.

Une pareille configuration des masses crée à la surface du sol une anomalie de gravité $\Delta g = -\frac{\partial V}{\partial z}\Big|_{z=0}$, où V est le potentiel des

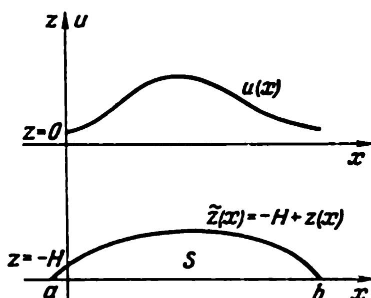


Fig. 1

masses de densité $\rho = \rho_2 - \rho_1$ remplissant le domaine S (voir fig. 1).

Puisque

$$V = \int_S \frac{\rho}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta, \quad \text{où} \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (z-\eta)^2},$$

on a

$$\Delta g = -\frac{\rho}{2\pi} \int_a^b \int_{-H}^{-H+z(\xi)} -\frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta\, \Big|_{z=0} =$$

$$= \frac{\rho}{2\pi} \int_a^b \ln \frac{(x-\xi)^2 + H^2}{(x-\xi)^2 + (H - z(\xi))^2}\, d\xi.$$

L'anomalie de gravité à la surface du sol se prête à la mesure.

Ainsi donc, le problème de définition de la fonction $z(x)$ se ramène à la résolution d'une équation intégrale non linéaire de première espèce

$$Az \equiv \int_a^b \ln \frac{(x-\xi)^2 + H^2}{(x-\xi)^2 + (H - z(\xi))^2}\, d\xi = u(x),$$

où $u(x) = \frac{2\pi}{\rho} \Delta g$. Ici A est un opérateur intégral non linéaire. On montre facilement que la solution de cette équation est instable vis-à-vis de faibles variations du second membre $u(x)$.

Les questions d'unicité de la solution du problème inverse de gravimétrie sont abondamment traitées dans de nombreux ouvrages [42, 95, 125, 126, 131 à 140].

Signalons encore quelques classes de problèmes mathématiques dans lesquelles on trouve des problèmes mal posés: résolution de systèmes d'équations algébriques linéaires lorsque le déterminant du système est nul (ch. III); certains problèmes de programmation linéaire (ch. VIII); problèmes de minimisation de fonctionnelles considérés dans les conditions où la convergence des valeurs de la fonctionnelle à minimiser vers sa valeur minimale n'implique pas la convergence de la suite minimisante (ch. VII); certains problèmes de commande optimale (ch. VII) et certains autres [104].

2. Une classe importante de problèmes mal posés, qui jouent un grand rôle dans les applications, est constituée par les problèmes d'établissement des projets de systèmes optimaux et de constructions optimales. Nous allons en considérer un ci-dessous.

Proposons-nous de résoudre un problème de synthèse d'un système physique. Ce peut être par exemple le problème de synthèse d'un système optique à « facteurs de transmission » (de réflexion) connus; de tels systèmes peuvent être réalisés, en particulier, en superposant des couches (pellicules) multiples à la surface d'un « support » approprié.

Considérons une lame plane non homogène infinie d'épaisseur H, d'indice de réfraction n. Supposons que sur la surface de cette lame tombe normalement une onde lumineuse plane monochromatique de longueur $\lambda = 2\pi c/\omega$. Prenons l'axe de coordonnée de la variable z perpendiculaire à la surface de la lame, de telle sorte qu'on ait $0 < z < H$ à l'intérieur de la lame.

Supposons que:

a) les demi-espaces $\{z < 0\}$ et $\{z > H\}$ de part et d'autre de la lame sont homogènes et ont des indices de réfraction identiques égaux à n_0 et à n_H;

b) l'absorption est nulle dans la lame et dans ces demi-espaces.

Admettons que le champ électrique de l'onde incidente dans le demi-espace $\{z < 0\}$ soit de la forme $E_{\text{inc}} = \mathscr{E}_0(z)\, e^{i\omega t}$, où $\mathscr{E}_0(z) = E_0 e^{-i\frac{\omega}{c}n_0 z}$ est l'amplitude de l'onde. Dans les conditions indiquées l'amplitude du champ électrique $\mathscr{E}(z)$ vérifie l'équation (cf. [35])

$$\mathscr{E}'' + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \mathscr{E} = 0.$$

Dans le demi-espace $\{z < 0\}$ le champ électrique résultera de ceux des ondes incidente et réfléchie. L'amplitude $\tilde{\mathscr{E}}_0(z)$ du champ résultant dans ce domaine sera égale à $\tilde{\mathscr{E}}_0(z) = \mathscr{E}_0(z) + c_1 e^{i\frac{\omega}{c}n_0 z}$.

L'amplitude du champ électrique de l'onde ayant traversé la lame sera égale à $\mathscr{E}_H(z) = c_2\mathscr{E}_0(z)$.

L'amplitude $\mathscr{E}(z)$ du champ à l'intérieur de la lame est la solution du problème aux limites (cf. [35])

$$\mathscr{E}'' + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(z)\mathscr{E} = 0, \quad 0 < z < H, \qquad (0;\ 3{,}1)$$

$$\mathscr{E}'(0) - i\frac{\omega}{c} n_0 [\mathscr{E}(0) - 2E_0] = 0, \qquad (0;\ 3{,}2)$$

$$\mathscr{E}'(H) + i\frac{\omega}{c} n_0 \mathscr{E}(H) = 0. \qquad (0;\ 3{,}3)$$

Si $n(z)$ est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $(0, H)$, en ses points de discontinuité z_i doivent se vérifier les conditions de conjugaison de la forme

$$\mathscr{E}(z_i - 0) = \mathscr{E}(z_i + 0), \quad \mathscr{E}'(z_i - 0) = \mathscr{E}'(z_i + 0).$$

La perméabilité d'un tel système (lame) a pour mesure le « facteur de transmission »

$$T = \frac{n(H)}{n_0}\left|\frac{\mathscr{E}(H)}{\mathscr{E}_0(0)}\right|^2. \qquad (0;\ 3{,}4)$$

Il est évident que pour un système donné (lame) ce facteur est fonction de la longueur λ de l'onde incidente, $T = T(\lambda)$ *).

Le problème direct consiste dans la recherche du facteur de transmission $T(\lambda)$ d'après les valeurs données de $\mathscr{E}_0$, $n(z)$, H; il se réduit à la résolution du problème aux limites (0; 3,1) à (0; 3,3) par rapport à $\mathscr{E}(z)$.

On rencontre souvent le problème inverse, qui consiste à reconstruire le système $(n(z), H)$ à partir de la fonction $\hat{T}(\lambda)$ donnée, c'est-à-dire à rechercher l'indice de réfraction $n(z)$ de la lame et son épaisseur H. C'est le *problème de synthèse*.

Un tel problème n'est pas bien posé, car il est possible qu'à un facteur de transmission défini *a priori* ne corresponde aucun système $(n(z), H)$ réel (aucune lame d'épaisseur H et d'indice de réfraction $n(z)$). D'autre part, il est aussi possible qu'à un facteur de transmission donné $\hat{T}(\lambda)$ en correspondent plusieurs.

De plus, tout système n'est pas pratiquement réalisable.

Il y a intérêt à considérer le problème de synthèse dans le cas de systèmes lamellaires, dans lesquels la fonction $n(z)$ cherchée est constante par morceaux. L'indice de réfraction $n(z)$ a alors une valeur constante n_j dans la j-ième couche ($j = 1, 2, \ldots, N$); les épaisseurs d_j des couches sont arbitraires; le nombre de couches N n'est pas imposé. Parmi ces problèmes, on trouve le problème très

*) Dans certains cas, on considère au lieu de $T(\lambda)$ le « facteur de réflexion » $R(\lambda) = 1 - T(\lambda)$.

important de synthèse des revêtements multicouches. Etudions plus en détail la position mathématique de ce problème, qui est l'analogue discret du problème de synthèse des systèmes optiques considéré ci-dessus.

Nous ferons correspondre au système composé de N couches un vecteur de dimension $2N$ $x = \{d_1, d_2, \ldots, d_N; n_1, n_2, \ldots, n_N\}$ qui a pour coordonnées les épaisseurs d_j et les indices de réfraction n_j des couches. La solution du problème (0; 3,1) à (0; 3,3) met en correspondance de façon unique, par la formule (0; 3,4), à tout vecteur x de dimension $2N$ un certain facteur de transmission $T(\lambda)$. On définit donc, sur un ensemble de vecteurs x de dimension $2N$, un opérateur non linéaire

$$A(x, \lambda) = T(\lambda), \quad \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2. \qquad (0;\ 3{,}5)$$

Soient R^{2N} un espace vectoriel euclidien de dimension $2N$, D_{2N} un domaine fermé dans cet espace défini par les conditions

$$D_{2N} \equiv \{x \in R^{2N};\ \ d_j \geqslant 0,\ n_{\min} \leqslant n_j \leqslant n_{\max};\ \ j = 1, 2, \ldots, N\}.$$

L'écart des fonctions $T(\lambda)$ sera évalué dans la métrique de $L_2(\lambda_1, \lambda_2)$*). Soit $\hat{T}(\lambda)$ une fonction dans $L_2(\lambda_1, \lambda_2)$ définie sur l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$.

On posera

$$\delta_N = \inf_{x \in D_{2N}} \| A(x, \lambda) \| - \hat{T}(\lambda) \|_{L_2}.$$

Il est évident que $\delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \ldots \geqslant \delta_m \geqslant \ldots \geqslant 0$. La quantité $\delta_0 = \lim_{m \to \infty} \delta_m$ sera dite *précision limite réalisable.*

Le problème de synthèse consiste à construire un système à N couches ayant le facteur de transmission $\hat{T}(\lambda)$ désiré. Le système cherché doit avoir le nombre de couches N_0 *minimal* et l'épaisseur totale $d = \sum_{j=1}^{N} d_j$ *minimale.* Ces exigences supplémentaires sont imposées par la nécessité d'assurer la stabilité du système vis-à-vis des sollicitations extérieures (les systèmes à couches très nombreuses se détériorent facilement), par les performances des appareils d'application des revêtements extra-minces, etc.

Exprimé en termes mathématiques, ce problème revient à chercher une solution approchée de l'équation

$$A(x, \lambda) = \hat{T}(\lambda) \qquad (0;\ 3{,}6)$$

minimisant N et $d = \sum_{j=1}^{N} d_j$ et telle que $\| A(x, \lambda) - \hat{T}(\lambda) \|_{L_2} \leqslant \delta$, où δ est une quantité connue ($\delta \geqslant \delta_0$). Ce problème se résout de la

*) Au lieu de la métrique de L_2, on peut aussi prendre la métrique de C.

façon suivante. Augmentant successivement le nombre de couches N, on aboutit à la valeur minimale de $N = N_0$ pour laquelle il existe dans D_{2N_0} un vecteur x_{N_0} tel que $\| A (x_{N_0}, \lambda) - \hat{T} (\lambda) \|_{L_2} \leqslant \delta$.

Après avoir trouvé le nombre N_0, on cherche dans la classe des vecteurs x de D_{2N_0} vérifiant la condition $\| A (x, \lambda) - \hat{T} (\lambda) \|_{L_2} \leqslant \delta$ un vecteur x susceptible de minimiser $d = \sum_{j=1}^{N_0} d_j$. Ce problème a bien une solution, car D_{2N_0} est un ensemble convexe fermé d'un espace euclidien de dimension finie. On donne dans [35] quelques exemples de résolution numérique de pareils problèmes.

3. Le problème de synthèse des systèmes optiques que l'on vient de considérer est un problème de recherche du coefficient $n (z)$ de l'équation (0; 3,1) d'après la fonctionnelle connue $T (\lambda)$ de la solution de cette équation. C'est là un des problèmes inverses de la physique mathématique.

Dans bien des cas encore, nombre de problèmes physiques se réduisent à la recherche des coefficients des équations différentielles (ordinaires ou aux dérivées partielles) à partir de certaines fonctionnelles connues de leurs solutions. Citons par exemple le problème cinématique inverse de la sismologie. Son aspect physique consiste en ce qui suit. Dans un domaine donné D limité par la surface S, on considère un processus ondulatoire (c'est-à-dire défini par une équation d'onde) engendré par des sources agissant en certains points de la surface S. Dans d'autres points de la frontière S, on enregistre le temps que mettent les ondes pour traverser le domaine en question. Connaissant ces données, on demande de calculer la vitesse $a = a (M)$ de propagation des ondes à l'intérieur du domaine comme fonction du point M. On connaît bien d'autres problèmes physiques conduisant à des problèmes inverses de ce type. Les problèmes de cette classe sont étudiés dans les travaux [20, 101 à 103, 111, 141 à 143].

4. Entre autres problèmes importants, citons le problème de création de systèmes automatiques de traitement mathématique des données obtenues à la suite d'une expérience physique. Sur une des étapes du traitement on a à résoudre des problèmes inverses du type $Az = u$ par rapport à z.

Les installations d'expérimentation modernes destinées à l'étude de divers phénomènes et objets physiques représentent bien souvent des dispositifs très complexes et onéreux : tels sont les accélérateurs de particules élémentaires, les installations servant à l'obtention et à l'étude du plasma à haute température, les appareils permettant d'étudier les propriétés des corps à une température extrabasse, et ainsi de suite.

Pour recueillir une information fiable sur le phénomène étudié, pour en savoir plus long sur les effets « rares » et « faibles », on est souvent amené à répéter une expérience un grand nombre de fois.

Grâce à des méthodes automatiques d'exécution de l'expérience et d'enregistrement des résultats, on réussit à accumuler en un temps assez court un volume considérable d'information nécessaire: dizaines ou centaines de milliers de clichés, d'oscillogrammes, d'indications de détecteurs, etc. Afin de dégager de cette information les caractéristiques cherchées du phénomène ou de l'objet qu'on étudie, on entreprend un traitement (ou dépouillement) des données obtenues. Dans bien des cas, ce traitement doit être effectué presque simultanément avec l'expérience ou, à la rigueur, avec un décalage très faible dans le temps. Dépouiller en un temps acceptable un volume énorme d'information n'est possible qu'avec l'utilisation d'une calculatrice électronique.

Dans le traitement des données expérimentales obtenues avec des techniques variées, on distingue les étapes suivantes [66].

Première étape. Prélèvement de l'information sur un enregistreur ou un support fixe (film), sa mise en code numérique et son introduction dans la mémoire de l'ordinateur.

Deuxième étape. Dépouillement statistique des données avec évaluation du degré de certitude; prise en considération des mesures de normalisation (de fond, d'étalonnage, de dosimétrie, etc.).

Troisième étape. Interprétation des résultats obtenus à la deuxième étape de traitement. Elle consiste généralement dans l'estimation des caractéristiques cherchées du modèle du phénomène ou de l'objet étudié.

Puisque, dans une expérience physique, nous ne voyons pas directement les caractéristiques z du phénomène mais, dans la plupart des cas, leurs manifestations particulières $u = Az$, le problème d'interprétation se réduit habituellement à la résolution de l'équation $Az = u$. Ce problème s'avère souvent mal posé.

L'ensemble des programmes assurant toutes les trois étapes de traitement porte le nom de *système complet de traitement mathématique* des données expérimentales, ou plus brièvement: *système de traitement*. Le traitement peut être effectué tant « en dialogue » que de façon absolument automatique, sans que l'homme ait à intervenir à aucun stade intermédiaire. La procédure du traitement automatique des données, telle qu'on vient de la décrire, nécessite l'emploi d'algorithmes de résolution des équations $Az = u$ (y compris pour les problèmes mal posés) facilement réalisables sur l'ordinateur.

On trouve dans [33, 176] la description d'un système automatique de traitement mathématique des données physiques d'une expérience ayant pour objet l'étude de l'interaction des quanta γ avec les neutrons et les protons.

5. Une autre classe importante de problèmes mal posés que l'on rencontre en physique, en technique et dans d'autres domaines, est celle des problèmes dits *inverses*.

Supposons que l'objet (le phénomène) étudié se caractérise par

un élément (fonction, vecteur) z_{ex} appartenant à un ensemble F. Bien souvent, l'élément z_{ex} étant lui-même inacceptable à une étude directe, on en étudie une manifestation particulière $Az_{ex} = u_{ex}$ ($u_{ex} \in AF$, où AF est l'image de l'ensemble F par l'opérateur A). Il est évident que l'équation

$$Az = u \qquad (0;\ 3{,}7)$$

n'admet de solution sur F que pour les éléments u appartenant à l'ensemble AF. L'élément u_{ex}, obtenu le plus souvent comme résultat de mesures, n'est connu que d'une façon approximative. Soit $\tilde{u}$ cette valeur approximative. On ne peut chercher alors qu'une solution approchée (voisine de z_{ex}) de l'équation

$$Az = \tilde{u}. \qquad (0;\ 3{,}8)$$

En général, $\tilde{u}$ n'appartient pas, dans ce cas, à l'ensemble AF. Souvent, la nature de l'opérateur A est telle que son inverse A^{-1} n'est pas continu (par exemple, lorsque A est un opérateur complètement continu, comme l'opérateur intégral de l'exemple 1). Dans ces conditions, on ne peut prendre en qualité de solution approchée la solution exacte de (0; 3,7) à second membre approché, c'est-à-dire qu'on ne peut adopter comme solution approchée un élément $z = A^{-1}\tilde{u}$, car:

a) cette solution risque de ne pas exister sur l'ensemble F, puisque $\tilde{u}$ peut ne pas appartenir à AF (la condition 1) pour les problèmes bien posés n'est pas respectée);

b) si elle existe, cette solution ne sera pas stable, puisque l'opérateur inverse A^{-1} n'est pas continu; or, la condition de stabilité de la solution du problème (0; 3,7) découle généralement de sa détermination physique, et, pour cette raison, la solution approchée doit avoir cette propriété. On voit que n'est pas respectée la condition 3) pour les problèmes bien posés. Donc, le problème (0; 3,7) est mal posé.

L'instabilité d'une solution rend souvent difficile l'interprétation physique des données expérimentales. D'autre part, la condition de stabilité doit être respectée pour qu'on puisse utiliser les méthodes de calcul numériques avec les données initiales approchées. Il se pose donc, pour les problèmes inverses, une question d'importance capitale: *que doit-on entendre par « solution approchée » des problèmes de ce genre?* Une fois la réponse trouvée, on se met à la recherche d'algorithmes de construction des solutions approchées de ces problèmes, algorithmes qui doivent être stables vis-à-vis de faibles variations des données initiales.

6. Dans ce qui suit, notre attention sera essentiellement attachée aux méthodes de résolution de problèmes mal posés du type (0; 3,7). Parmi les équations de ce type, citons les systèmes d'équations algébriques linéaires ainsi que les équations intégrales de Fredholm

de première espèce. Dans le premier cas, l'opérateur A est une matrice ayant comme éléments les coefficients du système; dans le second, l'opérateur A est un opérateur intégral

$$Az \equiv \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds.$$

7. Supposons que dans l'équation (0; 3,7) les éléments z et u soient des fonctions (scalaires ou vectorielles) d'un point M et du temps t, et que l'opérateur A, défini par la nature du convertisseur de z en u, soit linéaire. Connaissant la réaction (réponse) du convertisseur à la fonction δ de Dirac devenant infinie pour $M = P$ et $t = \tau$, c'est-à-dire la fonction $A\delta\,(M;\ P;\ t,\ \tau) = K\,(M, P;\ t, \tau)$, on a pour une fonction arbitraire $z\,(M,\ t)$ de F

$$Az \equiv \int K\,(M,\ P;\ t,\ \tau)\, z\,(P,\ \tau)\, dv_P\, d\tau,$$

où l'intégrale est prise sur tout le domaine de définition de la fonction $z\,(P,\ t)$. La fonction $K\,(M,\ P;\ t,\ \tau)$ se nomme *fonction de transmission* ou *réponse percussionnelle* du convertisseur (du système) ou bien encore *fonction de réponse*. Dans ce cas l'équation (0; 3,7) se réduit à une équation intégrale de première espèce.

Considérons par exemple le problème d'analyse de la composition spectrale d'un rayonnement lumineux (problème de spectroscopie). Supposons que le rayonnement observé soit non homogène et que la distribution de la densité d'énergie le long du spectre se caractérise par la fonction $z\,(s)$, où s est la fréquence (ou l'énergie). En faisant passer ce rayonnement à travers un instrument de mesure on obtient un spectre expérimental $u\,(x)$. Dans cette expression x peut être aussi bien la fréquence que la tension ou l'intensité de courant de l'instrument de mesure. Si l'échelle de l'appareil de mesure est linéaire, la relation fonctionnelle entre $z\,(s)$ et $u\,(x)$ se définit par la formule

$$Az \equiv \int_a^b K(x,\ s)\, z(s)\, ds = u\,(x),$$

où $K\,(x,\ s)$ est la fonction de réponse, qui est censée être connue. Elle représente le spectre expérimental (comme fonction de x) si l'instrument est attaqué par un rayonnement monochromatique de fréquence s et d'intensité unitaire (c'est justement la fonction delta, $\delta\,(s - x)$). Ici a et b sont les extrémités du spectre.

8. Si z est uniquement fonction du temps et le convertisseur (l'appareillage) fournit une réponse homogène dans le temps, la

fonction $K(M, P; t, \tau)$ ne dépendra que de la différence $t - \tau$, en sorte que

$$K(M, P; t, \tau) = K(t - \tau).$$

L'opérateur Az s'écrit alors

$$Az \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau)\, z(\tau)\, d\tau,$$

et l'équation (0; 3,7) devient

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau)\, z(\tau)\, d\tau = u(t). \qquad (0;\ 3{,}9)$$

C'est une équation intégrale de première espèce du type de convolution. On rencontre l'équation (0; 3,9), par exemple, en résolvant les problèmes suivants:

a) problème de reconstitution de la forme d'une impulsion radio $z(t)$ émise par une source et enregistrée sous la forme $u(t)$ à une grande distance de la source, connaissant la fonction impulsionnelle $K(t)$ du canal de transmission. L'équation pour $z(t)$ s'écrit

$$Az \equiv \int_{0}^{t} K(t-\tau)\, z(\tau)\, d\tau = u(t);$$

b) problème de reconstitution de la forme $z(t)$ d'une impulsion électrique attaquant l'entrée d'un câble d'après l'impulsion $u(t)$ enregistrée à la sortie du câble

$$\int_{0}^{t} K(t-\tau)\, z(\tau)\, d\tau = u(t),$$

où $K(t)$ est la fonction impulsionnelle du câble (voir ch. II);

c) calcul des dérivées d'une fonction connue approximativement. Pour la dérivée $z(x)$ d'ordre n de la fonction $u(x)$, on a l'équation

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{(n-1)\,!}(x-t)^{n-1} z(t)\, dt = u(x);$$

d) problèmes de régulation automatique, par exemple: définition des fonctions de transmission $k(t)$ des convertisseurs linéaires d'après les signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$

$$Ak \equiv \int_{0}^{t} x(t-\tau)\, k(\tau)\, d\tau = y(t);$$

les problèmes de cette nature sont fort nombreux (voir [148, 164]).

CHAPITRE PREMIER

MÉTHODE D'ESSAI. QUASI-SOLUTIONS

La recherche des solutions approchées de problèmes mal posés stables vis-à-vis de faibles variations des données initiales devient possible grâce à l'exploitation d'une information supplémentaire relative à la solution. Il y a plusieurs types d'information supplémentaire. Dans une première catégorie des cas, l'information supplémentaire de caractère quantitatif permet de restreindre la classe des solutions possibles à un ensemble compact, par exemple, le problème devenant alors stable vis-à-vis de faibles variations des données initiales. Dans une deuxième catégorie des cas, les solutions approchées stables vis-à-vis de faibles variations des données initiales sont recherchées en utilisant uniquement une information qualitative sur la solution (ce peut être par exemple l'information sur le caractère de régularité de la solution) (voir [156 à 161, 176]).

Nous étudions dans ce chapitre la méthode d'essai (dont le domaine d'application est très étendu), la méthode de quasi-solution, ainsi que la méthode de substitution à l'équation initiale d'une équation voisine de celle-ci et la méthode de quasi-réversibilité. Le problème mal posé que nous allons considérer consistera à résoudre l'équation

$$Az = u \qquad (1\,;\,0{,}1)$$

par rapport à z, où $u \in U$, $z \in F$; U et F sont des espaces métriques. L'opérateur A applique F sur U. On admet que l'opérateur inverse A^{-1} existe mais qu'il n'est pas en général continu. L'équation (1 ; 0,1) contenant l'opérateur A ayant les propriétés indiquées sera appelée *équation opératorielle de première espèce*, ou plus brièvement, *équation de première espèce*.

§ 1. Méthode d'essai de la solution de problèmes mal posés

1. Parmi les méthodes de résolution approchée de l'équation (1 ; 0,1) employées dans la pratique des calculs, on distingue la méthode d'essai. Elle consiste à calculer, pour les éléments z d'une sous-classe des solutions possibles M ($M \subset F$) donnée à l'avance,

l'opérateur Az; il s'agit, au fond, de résoudre le problème direct. En qualité de solution approchée, on choisit l'élément z_0 de l'ensemble M sur lequel le résidu*) $\rho_U(Az, u)$ atteint le minimum, c'est-à-dire que

$$\rho_U(Az_0, u) = \inf_{z \in M} \rho_U(Az, u).$$

Supposons qu'on connaisse le second membre exact de l'équation (1 ; 0,1), $u = u_{ex}$, et qu'il s'agisse d'en trouver la solution z_{ex}. En général, on choisit en qualité de M un ensemble d'éléments z qui soient fonctions d'un nombre fini de paramètres, ceux-ci ne variant que dans des limites finies, de telle façon que M soit un ensemble fermé dans un espace de dimension finie. Si la solution exacte cherchée z_{ex} de (1 ; 0,1) appartient à l'ensemble M, alors $\inf_{z \in M} \rho_U(Az, u) = 0$, et c'est sur la solution exacte z_{ex} que cette borne inférieure est atteinte. Si l'équation (1 ; 0,1) n'admet qu'une solution unique, l'élément z_0 minimisant $\rho_U(Az, u)$ se définit aussi de façon unique.

Pratiquement, la minimisation du résidu $\rho_U(Az, u)$ s'effectue d'une façon approximative; donc, la première question qu'on se pose pour justifier la méthode d'essai est la suivante.

Soit $\{z_n\}$ une suite d'éléments pour laquelle $\rho_U(Az_n, u) \to 0$ quand $n \to \infty$. Peut-on affirmer qu'on a aussi $\rho_F(z_n, z_{ex}) \to 0$, c'est-à-dire que $\{z_n\}$ converge vers z_{ex}?

2. Cherchant à démontrer le bien-fondé de la méthode d'essai, on a été conduit à établir certaines exigences de caractère fonctionnel général qui délimitent la classe des solutions possibles M pour lesquelles la méthode d'essai est stable et $z_n \to z_{ex}$ [155]. Ces exigences impliquent la compacité de l'ensemble M et se basent sur le lemme topologique suivant.

Lemme. *Soit l'application d'un compact (en soi) F d'un espace métrique F_0 sur un ensemble U d'un autre espace métrique U_0. Si l'application $F \to U$ est continue et biunivoque, l'application inverse $U \to F$ est aussi continue.*

Démonstration. Soient z éléments de F $(z \in F)$ et u éléments de U $(u \in U)$. Supposons que la fonction $u = \varphi(z)$ réalise l'application directe $F \to U$, et la fonction $z = \psi(u)$, l'application inverse $U \to F$.

Considérons un élément quelconque u_0 de U. Montrons que la fonction $\psi(u)$ est continue sur u_0. Supposons le contraire; il existe alors un nombre $\varepsilon_1 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ on trouve dans U un élément $\tilde{u}$ vérifiant $\rho_U(\tilde{u}, u_0) < \delta$, tandis que $\rho_F(\tilde{z}, z_0) \geq \varepsilon_1$. Ici $\tilde{z} = \psi(\tilde{u})$, $z_0 = \psi(u_0)$.

---

*) On entendra par « résidu » la valeur de l'écart de $\rho_U(Az, u)$ par rapport à zéro.

Considérons une suite de valeurs de δ $\{\delta_n\}$ qui converge vers zéro: $\delta_n \to 0$ pour $n \to \infty$. On trouve pour tout δ_n un élément $\tilde{u}_n$ tel que

$$\rho_U(\tilde{u}_n, u_0) < \delta_n \quad \text{et} \quad \rho_F(\tilde{z}_n, z_0) \geqslant \varepsilon_1, \quad \text{où} \quad \tilde{z}_n = \psi(\tilde{u}_n).$$

Il est évident que la suite $\{\tilde{u}_n\}$ converge vers l'élément u_0. Puisque tous les éléments $\tilde{z}_n$ appartiennent à l'ensemble compact F, on peut extraire de la suite $\{\tilde{z}_n\}$ une sous-suite qui converge vers un certain élément $\tilde{z}_0$ de F:

$$\{\tilde{z}_{n_k}\} \to \tilde{z}_0.$$

Remarquons que $\tilde{z}_0 \neq z_0$, car $\rho_F(\tilde{z}_{n_k}, z_0) \geqslant \varepsilon_1$. A cette sous-suite répond une suite d'éléments

$$\tilde{u}_{n_k} = \varphi(\tilde{z}_{n_k})$$

de U qui converge (en vertu de la continuité de l'application φ) vers un élément $\tilde{u}_0 = \varphi(\tilde{z}_0)$ et qui représente une sous-suite de la suite $\{\tilde{u}_n\}$. Puisque cette dernière converge vers l'élément $u_0 = \varphi(z_0)$, on a

$$\tilde{u}_0 = \varphi(\tilde{z}_0) = u_0 = \varphi(z_0).$$

L'application $F \to U$ étant biunivoque, on doit avoir $\tilde{z}_0 = z_0$, ce qui contredit l'inégalité $\tilde{z}_0 \neq z_0$ déduite plus haut; le lemme est donc démontré.

Ainsi donc, dans la méthode de choix, la suite minimisante $\{z_n\}$ converge vers z_{ex} quand $n \to \infty$ si:

a) z_{ex} appartient à la classe des solutions possibles M;

b) l'ensemble M est un compact.

Supposons qu'on a, au lieu du second membre exact u_{ex}, un élément u_δ tel que $\rho_U(u_\delta, u_{ex}) \leqslant \delta$. Si u_δ appartient à l'ensemble AM (qui est l'image de M par l'opérateur A) et que M soit un compact, il est possible d'obtenir, par la méthode d'essai, une solution approchée z_n^δ de l'équation $Az = u_\delta$. Elle approchera aussi la solution z_{ex} de l'équation $Az = u_{ex}$, puisque l'opérateur inverse A^{-1} est continu sur AM. En recherchant l'approximation z_n^δ de z_{ex}, on doit tenir compte de l'erreur introduite sur le second membre, car

$$\rho_U(Az_n^\delta, u_{ex}) \leqslant \rho_U(Az_n^\delta, u_\delta) + \rho_U(u_\delta, u_{ex}).$$

3. Les raisonnements développés ci-dessus ont permis à M. Lavrentiev [99] de formuler la notion de *problème bien posé au sens de Tikhonov*. Relativement à l'équation (1; 0,1), le problème est dit bien posé au sens de Tikhonov si l'on sait que pour la valeur exacte de $u = u_{ex}$ l'équation (1; 0,1) a une solution z_{ex} et une seule, $Az_{ex} = u_{ex}$, appartenant au compact M donné. Dans ce cas l'opérateur A^{-1} est continu sur l'ensemble $N = AM$, et si l'on connaît non pas l'élément u_{ex} mais un élément u_δ tel que $\rho_U(u_{ex}, u_\delta) \leqslant \delta$ et $u_\delta \in N$, on peut prendre, en qualité de solution approchée de l'équation

(1 ; 0,1) à second membre $u = u_\delta$, l'élément $z_\delta = A^{-1}u_\delta$. Lorsque $\delta \to 0$ ($u_\delta \in N$!), z_δ tend vers z_{ex}. L'ensemble F_1 ($F_1 \subset F$), sur lequel le problème de recherche de la solution de l'équation (1 ; 0,1) est bien posé, est dit *classe de problèmes bien posés*. Ainsi, lorsque l'opérateur A est continu et réalise une application biunivoque, le compact M auquel appartient z_{ex} constitue la classe de problèmes bien posés pour l'équation (1 ; 0,1). On voit donc que si le problème (1 ; 0,1) est bien posé au sens de Tikhonov et que le second membre de l'équation $u \in AM$, un tel problème se résout à l'aide de la méthode d'essai. C'est une réponse bien exhaustive à la première question.

Considérons le problème de résolution de l'équation intégrale de Fredholm de première espèce

$$A_1 z \equiv \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds = u(x), \quad u(x) \in L_2 \qquad (1\,;\ 1{,}1)$$

sur l'ensemble M_1 de fonctions monotonement décroissantes (croissantes) et uniformément bornées $|z(s)| \leqslant B$. Ce problème est bien posé au sens de Tikhonov, car l'ensemble M_1 est un compact dans l'espace L_2 [43].

En effet, soit une suite quelconque $E \equiv \{z_1(s), z_2(s), \ldots$ $\ldots, z_n(s), \ldots\}$ de M_1. Conformément au théorème du choix de Helly *), il existe une sous-suite

$$E_1 \equiv \{z_{n_1}(s), z_{n_2}(s), \ldots, z_{n_k}(s), \ldots\}$$

de la suite E et une fonction $\bar{z}(s)$ de l'ensemble M_1, $\bar{z}(s) \in L_2$, telles que

$$\lim_{n_k \to \infty} z_{n_k}(s) = \bar{z}(s)$$

partout, sauf peut-être sur un ensemble dénombrable de points de discontinuité de la fonction $\bar{z}(s)$. De la convergence ponctuelle de la suite E_1 vers la fonction $\bar{z}(s)$ partout, sauf peut-être sur un ensemble dénombrable de points, découle, comme on sait **), la convergence de E_1 vers la fonction $\bar{z}(s)$ dans la métrique de L_2.

Ainsi donc, on peut prendre en qualité de solution approchée sur l'ensemble M_1 de l'équation (1 ; 1,1) à second membre $\tilde{u} \in AM_1$ connu approximativement la solution exacte de cette équation à second membre $u = \tilde{u}$. On sait que ce dernier problème équivaut à

---

*) Titchmarsh E. C. — *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations*. Oxford, Clarendon press, 1946.

**) M. Krasnosselski, P. Zabreïko, E. Poustylnik, P. Sobolevski — *Opérateurs intégraux dans les espaces des fonctions sommables* (en russe). Ed. « Naouka », Moscou, 1966.

la recherche sur M_1 de la fonction susceptible de minimiser la fonctionnelle

$$N[z, \tilde{u}] = \| A_1 z - \tilde{u} \|^2_{L_2}.$$

Soit $\rho_U(u_{ex}, \tilde{u}) \leqslant \delta$. On peut évidemment prendre alors en qualité de solution approchée de (1 ; 1,1) la fonction z_δ pour laquelle

$$\| A_1 z_\delta - \tilde{u} \|^2_{L_2} \leqslant \delta^2. \qquad (1\,;\,1{,}2)$$

En remplaçant l'opérateur intégral $A_1 z$ par une somme intégrale sur un réseau fixe à n nœuds et en désignant par z_i les valeurs prises par la fonction cherchée dans les points nodaux du réseau, on voit le problème de construction de la solution approchée de l'équation (1 ; 1,1) se réduire à la recherche d'un vecteur de dimension finie minimisant la fonctionnelle $N[z, \tilde{u}]$ et vérifiant l'inégalité (1 ; 1,2). C'est un problème de programmation linéaire.

Dans d'autres cas, on arrive à définir de façon efficace les classes compactes de problèmes bien posés, ce qui donne la possibilité de construire des solutions approchées stables.

4. Les valeurs initiales étant entachées d'erreurs, il se peut que l'élément u n'appartienne pas à l'ensemble AM. En pareil cas l'équation (1 ; 0,1) n'a pas de solution (au sens classique). Une question se pose: que doit-on entendre par solution approchée de l'équation (1 ; 0,1)?

Dans ces cas on introduit la notion de quasi-solution; sous la condition que l'ensemble M soit compact, on arrive à approcher la quasi-solution par la méthode d'essai.

Le paragraphe suivant est consacré à une étude détaillée de quasi-solutions.

§ 2. Quasi-solutions

1. Supposons l'opérateur A dans l'équation (1 ; 0,1) complètement continu. Comme il a été indiqué au § 1, la construction d'une solution approchée de l'équation (1 ; 0,1) stable vis-à-vis de faibles variations du second membre u par la formule

$$z = A^{-1} u \qquad (1\,;\,2{,}1)$$

n'est possible que dans les cas où la solution est cherchée sur le compact $M \subset F$ et le second membre u de l'équation appartient à l'ensemble $N = AM$.

Il n'existe, en général, pas de critères efficaces permettant d'établir l'appartenance de l'élément u à l'ensemble N; on admet ce fait *a priori*. Dans un grand nombre de problèmes pratiques, on ne connaît pas la valeur exacte du second membre u_{ex} mais sa valeur approchée $\tilde{u}$, laquelle peut ne pas appartenir à l'ensemble $N = AM$.

En pareils cas on ne peut pas construire la solution approchée de l'équation (1 ; 0,1) par la formule (1 ; 2,1), car le symbole $A^{-1}\tilde{u}$ risque de n'avoir aucun sens.

2. Le désir d'éliminer les inconvénients liés à l'inexistence de la solution de l'équation (1 ; 0,1) à second membre u mal défini a conduit V. Ivanov [71, 72] à la notion de quasi-solution de l'équation (1 ; 0,1), qui généralise la notion de solution de cette équation.

L'élément $\tilde{z} \in M$ minimisant pour u donné la fonctionnelle $\rho_U(Az, u)$ sur l'ensemble M est appelé *quasi-solution* de l'équation (1 ; 0,1) sur M,

$$\rho_U(A\tilde{z}, u) = \inf_{z \in M} \rho_U(Az, u).$$

Si M est un compact, il est évident que la quasi-solution existe pour tout $u \in U$; si en outre $u \in AM$, la quasi-solution $\tilde{z}$ coïncide avec la solution ordinaire (exacte) de l'équation (1 ; 0,1). La quasi-solution peut ne pas être unique; on entendra alors par quasi-solution un élément quelconque de l'ensemble D des quasi-solutions.

On peut définir les conditions suffisantes pour que la quasi-solution soit unique et dépende de façon continue du second membre u.

Rappelons la définition. Soient un élément y et un ensemble Q appartenant à l'espace U. On dit que l'élément q de l'ensemble Q est la *projection* de l'élément y sur Q, $q = Py$, si l'on a l'égalité

$$\rho_U(y, q) = \rho_U(y, Q),$$

où

$$\rho_U(y, Q) = \inf_{h \in Q} \rho_U(y, h).$$

Théorème 1. *Si l'équation $Az = u$ a sur le compact M une solution et une seule et si la projection de chaque élément $u \in U$ sur l'ensemble $N = AM$ est unique, la quasi-solution de l'équation* (2 ; 0,1) *est unique et dépend de façon continue du second membre u.*

Démonstration. Soit $\tilde{z}$ la quasi-solution et $\tilde{u} = A\tilde{z}$. Evidemment, $\tilde{u}$ est la projection de l'élément u sur l'ensemble $N = AM$. Conformément au théorème énoncé, elle est définie de façon unique. On en déduit, en vertu du caractère biunivoque de l'application de M sur N, l'unicité de la quasi-solution $\tilde{z}$.

Il est évident que $\tilde{z} = A^{-1}\tilde{u} = A^{-1}Pu$. En vertu du lemme de continuité de l'application inverse d'un compact (§ 1), l'opérateur A^{-1} est continu sur l'ensemble N. L'opérateur projectif P est continu sur U *). Aussi $A^{-1}P$ est-il un opérateur continu sur U; donc,

*) L. Liousternik, V. Sobolev — *Eléments d'analyse fonctionnelle* (en russe), Gostekhizdat, Moscou, 1951.

la quasi-solution $\tilde{z}$ dépend de façon continue du second membre u.

Ainsi donc, grâce à l'introduction de la quasi-solution, on retrouve toutes les conditions qu'il faut observer pour que le problème de recherche de la quasi-solution de l'équation (1 ; 0,1) sur le compact M soit bien posé.

Si la condition d'unicité de la solution de l'équation (1 ; 0,1) n'est pas respectée, les quasi-solutions forment un certain ensemble D d'éléments du compact M. Dans ce cas, sans les restrictions imposées par le théorème 1 sur l'ensemble N, l'ensemble des quasi-solutions D dépend de façon continue du second membre u, en ce sens que les applications multivoques sont continues. Cela est facile à démontrer (voir [72, 106]), seulement on aura besoin de quelques nouvelles notions; nous omettrons de le faire ici. Pour le cas où l'équation (1 ; 0,1) est linéaire, on aboutit facilement à des résultats plus généraux résumés dans le théorème suivant [72].

Théorème 2. *Si l'équation* (1 ; 0,1) *est linéaire, l'équation homogène* $Az = 0$ *admet une solution unique nulle, l'ensemble* M *est convexe et toute sphère dans l'espace* U *est strictement convexe, alors la quasi-solution de l'équation* (1 ; 0,1) *sur le compact* M *est unique et dépend de façon continue du second membre* u.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\tilde{z}$ la quasi-solution et $\tilde{u} = A\tilde{z}$. Puisque l'ensemble M est convexe, l'ensemble $N = AM$ l'est aussi en vertu de la linéarité de l'opérateur A. Il est évident que $\tilde{u}$ est la projection de l'élément u sur l'ensemble N. Du fait que la sphère dans l'espace U est par définition strictement convexe, la projection $\tilde{u}$ se définit de façon unique. Le reste de la démonstration est le même que dans le théorème 1.

3. Soient F et U deux espaces hilbertiens, $M \equiv S_R$ une boule ($\| z \| \leqslant R$) dans l'espace F et A un opérateur complètement continu.

On peut alors mettre la quasi-solution de l'équation (1 ; 0,1) sous la forme d'une série suivant les éléments (fonctions, vecteurs) propres φ_n de l'opérateur A^*A, où A^* est l'adjoint de l'opérateur A.

On sait que A^*A est un opérateur auto-adjoint complètement continu et positif de F dans F. Soient $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant \ldots$ le système complet de ses valeurs propres et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ le système correspondant complet orthonormé de ses éléments (fonctions, vecteurs) propres. On peut mettre l'élément A^*u sous la forme d'une série

$$A^*u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n. \qquad (1 ; 2,2)$$

On a alors [72] le

Théorème 3. *La quasi-solution de l'équation* (1 ; 0,1) *sur l'ensemble* S_R *s'exprime par les formules*

$$\tilde{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\lambda_n}\varphi_n \qquad (1\,;\,2{,}3)$$

si

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{\lambda_n^2}<R^2, \qquad (1\,;\,2{,}4)$$

et

$$\tilde{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\beta+\lambda_n}\varphi_n$$

si

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{\lambda_n^2}\geqslant R^2. \qquad (1\,;\,2{,}5)$$

Ici β *est racine de l'équation*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{(\lambda_n+\beta)^2}=R^2 \qquad (1\,;\,2{,}6)$$

D é m o n s t r a t i o n. La quasi-solution minimise la fonctionnelle

$$\rho_U^2(Az,\,u)=(Az-u,\;Az-u) \qquad (1\,;\,2{,}7)$$

pour laquelle l'équation d'Euler est de la forme

$$A^*Az = A^*u \;{}^{*)}. \qquad (1\,;\,2{,}8)$$

Nous allons chercher la solution de cette équation sous la forme d'une série suivant le système $\{\varphi_n\}$:

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n. \qquad (1\,;\,2{,}9)$$

Portant cette série dans l'équation (1 ; 2,8) et utilisant le développement (1 ; 2,2), on trouve $c_n = b_n/\lambda_n$. Par conséquent, l'inégalité (1 ; 2,4) signifie que $\| z \| < R$ et il s'agit donc de rechercher l'extrémum libre de la fonctionnelle (1 ; 2,7). C'est la série (1 ; 2,3) qui sera la solution du problème.

Par contre, si c'est l'inégalité (1 ; 2,5) qui a lieu, cela signifie

---

*) V. Smirnov — *Cours de mathématiques supérieures*, t. V (en russe). Gostekhizdat, 1948.

que $\| z \| \geqslant R$ et qu'il s'agit de chercher l'extrémum lié de la fonctionnelle (1 ; 2,7) sous la condition que $\| z \|^2 = R^2$. Utilisant la méthode des facteurs indéterminés de Lagrange, on réduit ce problème à la recherche de l'extrémum libre de la fonctionnelle

$$(Az - u, Az - u) + \alpha (z, z)$$

et ensuite à la résolution de l'équation d'Euler correspondante $A^*Az + \alpha z = A^*u$. Portant ici z sous la forme de la série (1 ; 2,9) et utilisant le développement (1 ; 2,2), on obtient

$$c_n = \frac{b_n}{\alpha + \lambda_n}.$$

Le paramètre α se définit de la condition $\| z \|^2 = R^2$ équivalente à (1 ; 2,6).

§ 3. Recherche approchée des quasi-solutions

Nous avons vu au paragraphe précédent que la recherche d'une quasi-solution est liée à la recherche d'un élément dans l'espace de dimension infinie. Si l'on se propose de chercher une quasi-solution approchée, il est naturel de passer à un espace de dimension finie. Il existe un procédé suffisamment général de recherche approchée des quasi-solutions de l'équation (1 ; 0,1) [60, 72] dans laquelle A est un opérateur complètement continu.

Supposons remplies les conditions suffisantes, énoncées au § 2, de l'existence d'une quasi-solution unique sur un ensemble M donné, c'est-à-dire que l'ensemble M est un compact convexe et qu'une sphère dans l'espace U est strictement convexe.

Soit

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots$$

une suite croissante de compacts fermés M_n, telle que la fermeture de leur réunion $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ coïncide avec M. L'équation (1 ; 0,1) admet une quasi-solution sur tout ensemble M_n. Pourtant, cette quasi-solution peut ne pas être unique. Désignons par T_n la collection complète des quasi-solutions sur l'ensemble M_n.

Montrons qu'il est légitime de prendre en qualité de valeur approchée de la quasi-solution $\tilde{z}$ sur l'ensemble M n'importe quel élément $\tilde{z}_n$ de T_n. On a alors

$$\lim_{n \to \infty} \rho_F (\tilde{z}_n, \tilde{z}) = 0.$$

Soient $N_n = AM_n$ et B_n l'ensemble des projections de l'élément u sur l'ensemble N_n. Il est évident que $B_n = AT_n$ et que $N_1 \subseteq \subseteq N_2 \subseteq \ldots \subseteq N_n$; alors

$$\rho_U (u, N_1) \geqslant \ldots \geqslant \rho_U (u, N_n) \geqslant \ldots \geqslant \rho_U (u, N) = \rho_U (u, A\tilde{z}). \quad (1 ; 3,1)$$

Puisque l'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ est dense partout sur N, on trouve pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $n_0(\varepsilon)$ tel que pour tous $n > n_0(\varepsilon)$ on ait

$$\rho_U(u, N_n) < \rho_U(u, N) + \varepsilon. \qquad (1;\ 3,2)$$

Il découle de (1 ; 3,1) et de (1 ; 3,2) que

$$\lim_{n\to\infty} \rho_U(u, N_n) = \rho_U(u, N). \qquad (1;\ 3,3)$$

Comme

$$\rho_U(u, N_n) = \rho_U(u, B_n),$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} \rho_U(u, B_n) = \rho_U(u, A\tilde{z}). \qquad (1;\ 3,4)$$

Tout ensemble B_n est un compact, car il représente un sous-ensemble fermé du compact N_n. Aussi trouvera-t-on dans B_n un élément y_n tel que

$$\rho_U(y_n, u) = \inf_{y\in B_n} \rho_U(y, u).$$

La suite $\{y_n\}$ contient au moins un point limite appartenant à N, car N est un compact. Soient y_0 un point limite quelconque de l'ensemble $\{y_n\}$ et $\{y_{n_k}\}$ une sous-suite convergente vers y_0, c'est-à-dire que

$$\lim_{n_k\to\infty} \rho_U(y_{n_k}, y_0) = 0.$$

De (1 ; 3,3) et de (1 ; 3,4) il découle que

$$\rho_U(u, y_0) = \lim_{n_k\to\infty} \rho_U(u, y_{n_k}) = \lim_{n_k\to\infty} \rho_U(u, B_{n_k}) =$$
$$= \rho_U(u, A\tilde{z}) = \rho_U(u, N).$$

Ainsi,

$$\rho_U(u, y_0) = \rho_U(u, N).$$

L'égalité précédente et l'unicité de la quasi-solution sur l'ensemble M entraînent

$$y_0 = A\tilde{z}.$$

Comme y_0 est un point limite arbitraire de l'ensemble $\{y_n\}$, la suite $\{y_n\}$ converge vers $A\tilde{z}$. On voit donc qu'il est possible de prendre comme valeur approchée de la quasi-solution n'importe quel élément $\tilde{z}_n$ de l'ensemble T_n, car, en vertu du lemme du § 1, $\tilde{z}_n \to \bar{z}$ quand $n \to \infty$.

Si l'on prend en qualité de M_n des ensembles de dimension finie (à n dimensions), le problème de recherche de la quasi-solution approchée sur le compact M sera réduit à la minimisation de la fonctionnelle $\rho_U(Az, u)$ sur l'ensemble M_n.

Les quasi-solutions ont été étudiées aussi dans les travaux [52, 53, 58, 59, 61, 74, 106, 109].

§ 4. Substitution à l'équation $Az=u$ d'une équation voisine

Les équations du type (1 ; 0,1), avec le second membre u n'appartenant pas à l'ensemble $N = AM$, ont été étudiées par M. Lavrentiev [97 à 99]. Il a eu l'idée de substituer à l'équation initiale (1 ; 0,1) une équation « voisine » en un certain sens de celle-ci, pour rendre le problème de recherche de la solution stable vis-à-vis de faibles variations du second membre et résoluble quel que soit le second membre $u \in U$. Dans le cas le plus élémentaire, on procède de la façon suivante.

Soient $F \equiv U \equiv H$ trois espaces hilbertiens, A un opérateur auto-adjoint, positif, borné et linéaire, $S_R \equiv \{x, \|x\| \leqslant R, x \in F\}$ une boule de rayon R dans l'espace F, B un opérateur complètement continu défini sur S_R pour tout $R > 0$. En qualité de classe des problèmes bien posés M, on prend l'ensemble $D_R = BS_R$, image de la boule S_R par l'opérateur B. On suppose que la solution exacte cherchée z_{ex} de l'équation (1 ; 0,1) à second membre $u = u_{ex}$ existe et appartient à D_R. Prenons au lieu de l'équation (1 ; 0,1) l'équation

$$(A + \alpha E)\, z \equiv Az + \alpha z = u \qquad (1 ;\ 4,1)$$

dans laquelle $\alpha > 0$ est un paramètre numérique. A condition de choisir convenablement le paramètre α, on adopte la solution de l'équation (1 ; 4,1)

$$z_\alpha = (A + \alpha E)^{-1} u \qquad (1 ;\ 4,2)$$

comme solution approchée de l'équation (1 ; 0,1). Ici E est l'opérateur unitaire.

R e m a r q u e. Afin d'évaluer l'écart $\rho_F(z_{ex}, z_\delta)$ de la solution approchée par rapport à celle exacte, on peut utiliser le module de continuité ω de l'opérateur inverse sur N.

Soient $u_1, u_2 \in N$ et $\rho_U(u_1, u_2) \leqslant \delta$. Alors

$$\omega(\delta, N) = \sup_{u_1,\, u_2 \in N} \rho_F(A^{-1}u_1, A^{-1}u_2).$$

Il est évident que si $\rho_U(u_{ex}, u_\delta) \leqslant \delta$ et si $z_\delta = A^{-1}u_\delta$, alors

$$\rho_F(z_{ex}, z_\delta) \leqslant \omega(\delta, N).$$

Revenons à l'équation (1 ; 4,1). Si $\|Az\| \leqslant \delta$ et $\omega(\delta, D_R) = \sup_{D_R} \|z\|$, il est facile d'estimer l'écart de z_α par rapport à z_{ex}.

Il est évident que

$$\| z_\alpha - z_{ex} \| \leqslant \| \bar{z}_\alpha - z_{ex} \| + \| z_\alpha - \bar{z}_\alpha \|, \qquad (1\,;\,4,3)$$

où

$$\bar{z}_\alpha = (A + \alpha E)^{-1} u_{ex}.$$

Donc,

$$\| z_\alpha - z_{ex} \| \leqslant \omega(\delta,\, D_R) + \frac{\delta}{\alpha}. \qquad (1\,;\,4,4)$$

Connaissant le module de continuité $\omega(\delta, D_R)$ ou son majorant, on peut tirer de (1 ; 4,4) la valeur du paramètre α comme fonction de δ minimisant le second membre dans l'inégalité (1 ; 4,4).

§ 5. Méthode de quasi-réversibilité

1. Il est connu que le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur à sens du temps inversé (problème rétrograde) est instable vis-à-vis de faibles variations des valeurs initiales. L'instabilité persiste également lorsque la solution est assujettie à certaines conditions accessoires aux limites. La méthode de quasi-réversibilité [104] vise à obtenir une solution stable de pareils problèmes. Nous allons décrire l'essentiel de la méthode pour l'équation de la chaleur la plus simple, sans chercher à en démontrer le bien-fondé. Le lecteur trouvera dans [104] une description détaillée de la méthode, ainsi que ses applications à une classe plus étendue de problèmes.

2. Plaçons-nous dans le cas du problème direct. Soient D un domaine fini de l'espace euclidien R^n à n dimensions des points $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ limité par une surface lisse par morceaux S et t le temps. Soit ensuite $\varphi(x)$ une fonction continue définie dans D. Le problème direct consiste à chercher la solution $u = u(x, t)$ de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad (1\,;\,5,1)$$

dans le domaine $G \equiv \{x \in D,\ t > 0\}$ vérifiant les conditions aux limites

$$u(x, t) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in S \qquad (1\,;\,5,2)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = \varphi(x). \qquad (1\,;\,5,3)$$

Ici

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}.$$

On sait que ce problème a bien une solution. A chaque fonction $\varphi(x) \in C$ répond une solution du problème (1 ; 5,1) à (1 ; 5,3). Nous le désignerons par $u(x, t; \varphi)$.

Le problème inverse consiste à trouver la fonction $\varphi(x)$ à partir de la fonction connue $u(x, t; \varphi)$. Dans les problèmes pratiques, la fonction $u(x, t; \varphi)$ s'obtient en général à la suite d'une série de mesures: on ne la connaît donc qu'approximativement. Nous admettrons que $u \in L_2$. Il se peut que cette fonction ne correspond à aucune fonction « initiale » $\varphi(x)$ et, par conséquent, il est fort possible de ne pas trouver dans la classe C des fonctions la solution du problème inverse. Pour cette raison, nous allons nous occuper du problème de recherche d'une certaine solution généralisée du problème inverse.

Soient connues une quantité $T > 0$ et une fonction $\psi(x)$ définie dans le domaine D, $\psi(x) \in L_2$. On définit sur les fonctions $\varphi(x)$ de la classe C la fonctionnelle

$$f(\varphi) = \int_D |u(x, t; \varphi) - \psi(x)|^2 dx.$$

Par *solution généralisée* du problème inverse nous entendrons la fonction $\varphi(x)$ sur laquelle on a

$$f_0 = \inf_{\varphi \in C} f(\varphi).$$

R e m a r q u e. L'intuition suggère de choisir la fonction $\varphi(x)$ de telle façon que $f(\varphi) = 0$. Il suffirait pour cela de trouver la solution du problème direct

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0;$$
$$u(x, t) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in S, \quad 0 < t < T;$$
$$u(x, T) = \psi(x)$$

et de poser $\varphi(x) = u(x, 0)$. Or, un tel problème, pour une fonction donnée $\psi(x)$ de L_2, serait en général non résoluble et, en outre, instable vis-à-vis de faibles variations de la fonction $\psi(x)$.

Sur une certaine classe de fonctions généralisées $\varphi(x)$ on a $f_0 = 0$ (voir [104]). Il s'agit donc de rechercher une valeur approchée de f_0 à une erreur donnée près.

Etant donné une quantité $\varepsilon > 0$, *trouver une fonction* $\varphi_\varepsilon(x)$ *telle que* $f(\varphi_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

Ce problème se résout justement par la méthode de quasi-réversibilité.

L'idée de la méthode de quasi-réversibilité consiste à chercher au lieu de l'opérateur de la chaleur $\partial/\partial t - \Delta$ un opérateur B_α « voisin » pour lequel le problème rétrograde

$$B_\alpha u_\alpha = 0, \quad x \in D, \quad t < T, \quad \alpha > 0;$$
$$u_\alpha (x, T) = \psi (x);$$
$$u_\alpha (x, T) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in S, \quad t < T$$

soit stable. Une fois le problème résolu, on pose

$$\varphi (x) = u_\alpha (x, 0).$$

Généralement, on prend en qualité d'opérateur B_α l'opérateur

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta - \alpha\Delta^2$$

et l'on cherche la solution du problème directe

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \Delta u_\alpha - \alpha\Delta^2 u_\alpha = 0, \quad x \in D, \quad t < T, \quad \alpha < 0;$$
$$u_\alpha (x, T) = \psi (x);$$
$$u_\alpha (x, T) = 0 \text{ pour } x \in S, \quad 0 < t \leqslant T,$$
$$\Delta u_\alpha = 0 \text{ pour } x \in S, \quad 0 < t \leqslant T.$$

Ensuite on pose

$$\varphi (x) = u_\alpha (x, 0).$$

Signalons que u_α ne converge pas au sens habituel pour $\alpha \to 0$.

La méthode de quasi-réversibilité est applicable à une classe plus étendue de problèmes se rapportant aux équations d'évolution (voir [104]).

CHAPITRE II

MÉTHODE DE RÉGULARISATION

Au chapitre premier on a considéré la situation où la classe des solutions possibles de l'équation (1 ; 0,1) est un compact. On rencontre cependant, dans toute une série de problèmes appliqués, la situation où cette classe F n'est pas un compact, et les variations du second membre de l'équation

$$Az = u, \qquad (2;\ 0,1)$$

liées à son caractère approché, sont susceptibles de sortir au-delà des frontières de l'ensemble AF. Nous appellerons ces problèmes *essentiellement mal posés*. Dans les travaux [156 à 161] est proposée une nouvelle méthode de résolution de problèmes mal posés, qui permet de construire les solutions approchées de l'équation (2 ; 0,1) stables vis-à-vis de faibles variations des données initiales pour des problèmes essentiellement mal posés. Cette méthode est basée sur la notion fondamentale d'*opérateur régularisant* (O. R.) [157].

§ 1. Notion d'opérateur régularisant

1. Soit l'opérateur A dans l'équation (2 ; 0,1) tel que son inverse A^{-1} n'est pas continu sur l'ensemble AF et l'ensemble des solutions possibles F n'est pas un compact.

Si l'on a dans le second membre de l'équation un élément $u_\delta \in U$ dont l'écart par rapport au second membre exact u_{ex} n'est pas supérieur à δ, $\rho_U(u_\delta, u_{ex}) \leqslant \delta$, il est évident que la solution approchée z_δ de (2 ; 0,1) ne peut être définie comme solution exacte de cette équation à second membre approché $u = u_\delta$, c'est-à-dire par la formule

$$z_\delta = A^{-1}u_\delta.$$

Le paramètre numérique δ caractérise l'erreur entachant le second membre de l'équation (2 ; 0,1). Aussi est-il naturel de définir z_δ par un opérateur fonction du paramètre dont les valeurs seront adaptées à l'erreur δ sur les données initiales u_δ. La corrélation doit être telle que lorsque $\delta \to 0$, c'est-à-dire quand le second membre u_δ

de l'équation (2; 0,1) s'approche (dans la métrique de l'espace U) de sa valeur exacte u_{ex}, la solution approchée z_δ tende (dans la métrique de l'espace F) vers la solution exacte cherchée z_{ex} de l'équation

$$Az = u_{ex}.$$

Supposons que les éléments $z_{ex} \in F$ et $u_{ex} \in U$ soient liés par la relation $Az_{ex} = u_{ex}$.

Définition 1. On dit que l'opérateur $R(u, \delta)$ est *régularisant* pour l'équation $Az = u$ dans le voisinage $u = u_{ex}$ s'il possède les propriétés suivantes:

1) il existe un nombre $\delta_1 > 0$ tel que l'opérateur $R(u, \delta)$ soit défini pour tout δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_1$, et pour tout $u_\delta \in U$ tel que

$$\rho_U(u_{ex}, u_\delta) \leqslant \delta;$$

2) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, u_{ex}) \leqslant \delta_1$ tel que l'inégalité

$$\rho_U(u_\delta, u_{ex}) \leqslant \delta \leqslant \delta_0$$

entraîne l'inégalité

$$\rho_F(z_\delta, z_{ex}) \leqslant \varepsilon,$$

où $z_\delta = R(u_\delta, \delta)$.

Remarque 1. La définition donnée ne suppose pas en général que l'opérateur R soit univoque. Par z_δ on désigne un élément quelconque de l'ensemble $\{R(u_\delta, \delta)\}$.

Dans bien des cas, il est plus commode d'employer une autre définition d'opérateur régularisant (O. R.), qui contient la définition donnée ci-dessus.

Définition 2. Un opérateur $R(u, \alpha)$ fonction du paramètre α est appelé *opérateur régularisant* pour l'équation $Az = u$ dans le voisinage $u = u_{ex}$ s'il possède les propriétés suivantes:

1) il existe un nombre $\delta_1 > 0$ tel que l'opérateur $R(u, \alpha)$ soit défini pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $u \in U$ tel que

$$\rho_U(u, u_{ex}) \leqslant \delta \leqslant \delta_1;$$

2) il existe une fonction de δ, $\alpha = \alpha(\delta)$, telle que pour tout $\varepsilon > 0$ on trouve un $\delta(\varepsilon) \leqslant \delta_1$ tel que si $u_\delta \in U$ et

$$\rho_U(u_{ex}, u_\delta) \leqslant \delta(\varepsilon),$$

alors

$$\rho_F(z_{ex}, z_\alpha) \leqslant \varepsilon,$$

où $z_\alpha = R(u_\delta, \alpha(\delta))$.

Cette définition ne suppose non plus que l'opérateur $R(u_\delta, \alpha(\delta))$ soit univoque. Il est à noter que la fonction $\alpha = \alpha(\delta)$ dépend également de u_δ *).

2. Si $\rho_U(u_{ex}, u_\delta) \leqslant \delta$, on peut, selon [156, 157], choisir en qualité de solution approchée de l'équation (2; 0,1) à second membre u_δ connu approximativement un élément $z_\alpha = R(u_\delta, \alpha)$ obtenu à l'aide de l'opérateur régularisant $R(u, \alpha)$, où $\alpha = \alpha(\delta, u_\delta)$ est adapté à l'erreur entachant les données initiales u_δ. Cette solution est dite *solution régularisée* de (2; 0,1). Le paramètre numérique α est le *paramètre de régularisation*. Il est évident que tout opérateur régularisant, conjointement avec le choix d'un paramètre de régularisation α adapté à l'erreur des données initiales δ $(\alpha = \alpha(\delta))$, définit une méthode stable de construction approchée des solutions de l'équation (2; 0,1). Si l'on sait que $\rho_U(u_{ex}, u_\delta) \leqslant \delta$, alors, en vertu de la définition de l'opérateur régularisant **), on peut choisir la valeur du paramètre de régularisation $\alpha = \alpha(\delta)$ de telle façon que, lorsque $\delta \to 0$, la solution régularisée $z_\alpha = R(u_\delta, \alpha(\delta))$ tende (dans la métrique de F) vers la solution exacte cherchée z_{ex}, c'est-à-dire que $\rho_F(z_{ex}, z_{\alpha(\delta)}) \to 0$. C'est ce qui justifie le choix de la solution régularisée en qualité de solution approchée de l'équation (2; 0,1).

Ainsi donc, le problème de recherche d'une solution approchée de l'équation (2; 0,1) stable vis-à-vis de faibles variations du second membre se réduit à:

a) rechercher les opérateurs régularisants;

b) définir le paramètre de régularisation α d'après une information supplémentaire sur le problème, par exemple d'après la grandeur de l'erreur entachant le second membre u_δ.

La méthode de construction des solutions approchées que l'on vient de décrire sera appelée *méthode de régularisation*.

3. Parmi les opérateurs $R(u, \alpha)$ dirigés de U dans F, dépendant du paramètre α et définis pour tout $u \in U$ et tout $\alpha > 0$, il convient de distinguer ceux qui sont continus par rapport à u. On peut formuler, pour ces opérateurs, les conditions suffisantes assurant leur appartenance aux opérateurs régularisants de l'équation (2; 0,1). Cela résulte du théorème que nous allons énoncer.

Théorème. *Soit A un opérateur dirigé de F dans U et soit $\bar{R}(u, \alpha)$ un opérateur dirigé de U dans F, défini pour tout élément u de U et*

---

*) Le fait que le paramètre α dépend de u_δ signifie qu'il dépend aussi de u_{ex}, donc de z_{ex}, puisque $Az_{ex} = u_{ex}$.

**) Dans cette définition u_{ex} est supposé fixé, c'est pourquoi on ne met pas en relief le fait que R dépend de u_{ex}. La seule information supposée sur u_{ex} est contenue dans la définition de δ. Si l'on dispose d'une information supplémentaire concernant u_{ex}, on introduit naturellement d'autres définitions de l'O. R. qui en tiennent compte.

pour tout $\alpha > 0$ *et continu par rapport à* u. *Si pour tout élément* $z \in F$ *on a*

$$\lim_{\alpha \to 0} \overline{R}(Az, \alpha) = z,$$

l'opérateur $\overline{R}(u, \alpha)$ *est un opérateur régularisant pour l'équation*

$$Az = u.$$

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de montrer que l'opérateur $\overline{R}(u, \alpha)$ possède la propriété 2) de la définition 2.

En effet, soient z_{ex} et u_{ex} deux éléments fixés dans F et U, $z_{ex} \in F$, $u_{ex} \in U$, $Az_{ex} = u_{ex}$ et δ un nombre positif fixé. Pour tout élément $u_\delta \in U$ tel que

$$\rho_U(u_\delta, u_{ex}) \leqslant \delta$$

on a

$$\rho_F(\overline{R}(u_\delta, \alpha), z_{ex}) \leqslant \rho_F(\overline{R}(u_\delta, \alpha), \overline{R}(u_{ex}, \alpha)) + \\ + \rho_F(\overline{R}(u_{ex}, \alpha), z_{ex}). \quad (2;\ 1,1)$$

L'opérateur $\overline{R}(u, \alpha)$ étant continu par rapport à u au « point » u_{ex}, pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit ($\delta \leqslant \delta_1$) l'inégalité

$$\rho_U(u_\delta, u_{ex}) \leqslant \delta \quad (2;\ 1,2)$$

entraîne

$$\rho_F(\overline{R}(u_\delta, \alpha), \overline{R}(u_{ex}, \alpha)) \leqslant \omega(\delta), \quad (2;\ 1,3)$$

où $\omega(\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$.

Puisque

$$\lim_{\alpha \to 0} \overline{R}(Az_{ex}, \alpha) = \lim_{\alpha \to 0} \overline{R}(u_{ex}, \alpha) = z_{ex},$$

il existe alors pour tout $\delta > 0$ un $\alpha_1 = \alpha_1(\delta, z_{ex})$ tel que pour $\alpha \leqslant \alpha_1$ on ait

$$\rho_F(\overline{R}(u_{ex}, \alpha), z_{ex}) \leqslant \omega(\delta). \quad (2;\ 1,4)$$

Des inégalités (2; 1,1), (2; 1,3), (2; 1,4) il découle que pour tout $\delta \leqslant \delta_1$ et $\alpha \leqslant \alpha_1$ on a l'inégalité

$$\rho_F(\overline{R}(u_\delta, \alpha), z_{ex}) \leqslant 2\omega(\delta). \quad (2;\ 1,5)$$

Puisque $\omega(\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$, on peut, pour tout $\varepsilon > 0$, indiquer un $\delta(\varepsilon)$ tel que pour $\delta \leqslant \delta(\varepsilon) \leqslant \delta_1$ et $\alpha = \alpha_1(\delta, z_{ex})$ les inégalités (2; 1,2) et (2; 1,5) entraînent

$$\rho_F(\overline{R}(u_\delta, \alpha), z_{ex}) \leqslant \varepsilon.$$

Le théorème est donc démontré.

R e m a r q u e 2. Les opérateurs $R(u, \alpha)$ dépendant d'un paramètre numérique α ont été considérés en mathématiques dans les démonstrations des théorèmes d'existence de solutions de divers problèmes (y compris les problèmes mal posés), ainsi qu'à la sommation généralisée des séries. Si ces opérateurs sont continus par rapport à u, alors, à condition de bien adapter α et δ, ils définissent des méthodes stables de recherche des solutions approchées.

§ 2. Sur les méthodes de construction des opérateurs régularisants

On trouvera dans les travaux [156 à 161] la méthode de construction des opérateurs régularisants pour les équations (2; 0,1). Elle est fondée sur le principe variationnel. Le présent paragraphe est justement consacré à sa description (voir aussi [211]). Il sera supposé que l'équation $Az = u_{ex}$ n'admet qu'une solution unique z_{ex}.

1. Soit $\Omega[z]$ une fonctionnelle non négative continue, définie sur un sous-ensemble F_1 de F dense partout sur F, de plus:

a) z_{ex} appartient au domaine de définition de $\Omega[z]$;

b) pour tout nombre $d > 0$ l'ensemble $F_{1,d}$ des éléments z de F_1 pour lesquels $\Omega[z] \leqslant d$ est un compact sur F_1.

Les fonctionnelles $\Omega[z]$ possédant ces propriétés s'appellent *fonctionnelles stabilisatrices*.

Soit donné que l'écart du second membre u_δ par rapport à sa valeur exacte u_{ex} ne dépasse pas δ, $\rho_U(u_\delta, u_{ex}) \leqslant \delta$. Il est naturel alors de chercher la solution approchée dans la classe Q_δ des éléments z tels que $\rho_U(Az, u_\delta) \leqslant \delta$. L'ensemble Q_δ est celui des solutions possibles. On ne peut cependant prendre en qualité de solution approchée de l'équation (2; 0,1) à second membre approché $u = u_\delta$ un élément arbitraire z_δ de Q_δ, car une telle « solution » ne sera pas en général continue par rapport à δ. L'ensemble en question est trop étendu. Il faut un *principe de sélection* des solutions possibles, permettant de choisir en qualité de solution approchée un ou plusieurs éléments de Q_δ qui dépendent de manière continue de δ. Ce peut être le principe variationnel proposé ci-dessous; il est applicable également à la construction des approximations de la quasi-solution, si cette dernière existe.

Soit $\Omega[z]$ une fonctionnelle stabilisatrice définie sur le sous-ensemble F_1 de F (F_1 peut coïncider avec F). Nous allons considérer seulement les éléments de l'ensemble Q_δ sur lesquels la fonctionnelle donnée $\Omega[z]$ est définie, c'est-à-dire seulement les éléments de l'ensemble $F_{1,\delta} = Q_\delta \cap F_1$. Parmi les éléments de cet ensemble cherchons un élément (ou des éléments) minimisant la fonctionnelle $\Omega[z]$ sur $F_{1,\delta}$. Soit z_δ un tel élément *). Il peut être considéré com-

*) L'existence d'un tel élément sera démontrée plus tard.

me le résultat d'action d'un opérateur $\widetilde{R}$ dépendant d'un paramètre δ sur le second membre $u = u_\delta$ de l'équation (2; 0,1), c'est-à-dire

$$z_\delta = \widetilde{R}(u_\delta, \delta)$$

2. Montrons que l'opérateur $\widetilde{R}(u, \delta)$ est régularisant pour l'équation (2; 0,1) et que, par conséquent, on peut prendre l'élément

$$z_\delta = \widetilde{R}(u_\delta, \delta)$$

en qualité de solution approchée de l'équation (2; 0,1).

On va montrer tout d'abord que l'opérateur $\widetilde{R}(u, \delta)$ est défini pour tout $\delta > 0$ et tout $u_\delta \in U$ pour lequel

$$\rho_U(u_\delta, u_{\text{ex}}) \leqslant \delta.$$

Puisque $\Omega[z]$ est une fonctionnelle non négative, elle a bien une borne inférieure exacte

$$\inf_{z \in F_{1,\delta}} \Omega[z] = \Omega_0.$$

Soit $\{z_n\}$ une sous-suite minimisante $\Omega[z]$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} \Omega[z_n] = \Omega_0.$$

Sans restreindre la généralité, on peut admettre que pour tout $n > 1$

$$\Omega[z_n] \leqslant \Omega[z_{n-1}] \leqslant \ldots \leqslant \Omega[z_1].$$

La suite $\{z_n\}$ appartient donc à l'ensemble compact (en soi) des éléments z de F_1 pour lesquels

$$\Omega[z] \leqslant \Omega[z_1].$$

On peut en extraire, par conséquent, une sous-suite convergente $\{z_{n_k}\}$. Soit

$$\lim_{n_k \to \infty} z_{n_k} = z_\delta.$$

Du moment que la suite $\{z_{n_k}\}$ est compacte sur F_1, l'élément z_δ appartient à l'ensemble F_1, et la fonctionnelle $\Omega[z]$ est définie sur cet élément *).

En vertu de la continuité de la fonctionnelle $\Omega[z]$ sur l'élément z_δ on a

$$\lim_{n_k \to \infty} \Omega[z_{n_k}] = \Omega[z_\delta].$$

Or, puisque

$$\lim_{n_k \to \infty} \Omega[z_{n_k}] = \Omega_0,$$

*) Il est facile de voir que $z_\delta \in F_{1,\delta}$.

on a

$$\Omega[z_\delta]=\Omega_0=\inf_{z\in F_{1,\delta}}\Omega[z].$$

Ainsi la propriété 1) de la définition de l'O. R. pour $\widetilde{R}(u, \delta)$ est démontrée. En ce qui concerne la propriété 2), elle se démontre comme suit.

Remarquant que l'élément z_δ minimise la fonctionnelle $\Omega[z]$ sur l'ensemble $F_{1,\delta}$ et que $z_{ex}\in F_{1,\delta}$, il est évident que

$$\Omega[z_\delta]\leqslant\Omega[z_{ex}].$$

L'élément z_δ appartient donc à l'ensemble compact sur F_1

$$F_{ex}\equiv\{z;\ \Omega[z]\leqslant\Omega[z_{ex}]\}.$$

Soit donnée une suite $\{u_n\}$ telle que $\rho_U(u, u_n)\leqslant\delta_n$, où $\{\delta_n\}$ est une suite des nombres positifs convergente vers zéro, c'est-à-dire que $\delta_n\to 0$ quand $n\to\infty$. Pour tout δ_n est défini un ensemble Q_{δ_n}. Soit

$$F_{1,\delta_n}=Q_{\delta_n}\cap F_1.$$

En vertu de ce qui vient d'être montré, il existe dans chaque ensemble F_{1,δ_n} un élément z_{δ_n} qui minimise la fonctionnelle $\Omega[z]$ sur cet ensemble. Aussi, à la suite des nombres $\{\delta_n\}$ correspond-elle une suite d'éléments $\{z_{\delta_n}\}$ appartenant à un ensemble F_{ex} compact sur F_1. On peut donc extraire de $\{z_{\delta_n}\}$ une sous-suite convergente (dans la métrique de F)

$$\{z_{\delta_{n_k}}\}.$$

Soit

$$\widetilde{z}=\lim_{n_k\to\infty}z_{\delta_{n_k}}.$$

Puisque $z_{\delta_n}\in F_{1,\delta_n}\subset Q_{\delta_n}$, chaque élément $z_{\delta_{n_k}}$ de la sous-suite $\{z_{\delta_{n_k}}\}$ vérifie l'inégalité

$$\rho_U(Az_{\delta_{n_k}}, u_{\delta_{n_k}})\leqslant\delta_{n_k}.$$

Passant dans cette inégalité à la limite pour $n_k\to\infty$ et tenant compte de la continuité de l'opérateur A, nous avons

$$\rho_U(A\widetilde{z}, u_{ex})=0.$$

Par conséquent, $A\widetilde{z}=u_{ex}$. En vertu de l'unicité de la solution de l'équation (2; 0,1) à second membre $u=u_{ex}$, on a $\widetilde{z}=z_{ex}$. Donc,

$$\lim_{n_k\to\infty}z_{\delta_{n_k}}=z_{ex}.$$

Cela est vrai pour toute sous-suite convergente de la suite $\{z_{\delta_n}\}$. Il en résulte que pour toute suite $\{\delta_n\}$ de nombres positifs δ_n convergente vers zéro, la suite correspondante $\{z_{\delta_n}\}$ converge (dans la métrique de l'espace F) vers l'élément z_{ex}.

On a démontré que l'opérateur $\widetilde{R}(u, \delta)$ possède la propriété 2) de la définition de l'O. R.; cela signifie que c'est un opérateur régularisant pour l'équation (2; 0,1).

R e m a r q u e. La méthode décrite convient aussi pour la construction de l'opérateur régularisant même si la solution de l'équation $Az = u_{ex}$ n'est pas unique. Dans ce cas toute sous-suite convergente z_{δ_n} converge vers une des solutions de l'équation (2; 0,1) à second membre $u = u_{ex}$, bien que les sous-suites différentes puissent converger vers des solutions différentes.

3. D'après la méthode proposée, le problème de recherche de la solution approchée de l'équation (2; 0,1) à second membre approché revient donc à rechercher le minimum de la fonctionnelle $\Omega[z]$ sur l'ensemble

$$F_{1,\delta} \equiv Q_\delta \cap F_1,$$

où

$$Q_\delta \equiv \{z;\ \rho_U(Az, u_\delta) \leqslant \delta\}.$$

Notons que la résolution numérique de ce dernier problème sur ordinateur est souvent difficile.

Soit M_0 l'ensemble de tous les éléments de F_1 sur lesquels $\Omega[z] = \Omega_0$, où

$$\Omega_0 = \inf_{z \in F_1} \Omega[z].$$

Admettons pour simplifier que M_0 ne contient qu'un seul élément z_0 *).

Il y a deux possibilités:

1) les ensembles M_0 et $F_{1,\delta}$ ont des éléments communs;

2) les ensembles M_0 et $F_{1,\delta}$ n'ont pas d'éléments communs.

Dans le premier cas, en qualité de solution du problème variationnel de recherche du minimum de la fonctionnelle $\Omega[z]$ sur l'ensemble $F_{1,\delta}$ on prend l'élément z_0. Cette solution est stable vis-à-vis de faibles variations de u_δ. En effet, elle appartient pour tout $\varepsilon > 0$ à un ensemble D_ε compact sur F_1 des éléments z pour lesquels $\Omega[z] \leqslant \Omega_0 + \varepsilon$. L'application réalisée par l'opérateur A est continue et biunivoque. Donc, en vertu du lemme du chapitre premier, § 1, l'application inverse de celle-ci est aussi continue.

*) Dans le cas où l'ensemble M contient plus d'un élément, la stabilité de la solution est interprétée comme la continuité des applications multivoques.

Dans le second cas on a $\rho_U(u_\delta, AM_0) > \delta$ et le problème de minimisation de la fonctionnelle $\Omega[z]$ sur l'ensemble $F_{1,\delta}$ se réduit, dans une vaste classe de cas, au problème classique de recherche d'un extrémum lié de la fonctionnelle $\Omega[z]$, ce dernier problème se prêtant beaucoup plus aisément au calcul numérique sur ordinateur. Cela est réalisable à l'aide du lemme que l'on va énoncer.

Nous dirons que la fonctionnelle $\Omega[z]$ est *quasi monotone* *) si pour tout élément z_0 de F_1 n'appartenant pas à l'ensemble M_0 on trouve dans son voisinage quelconque un élément z_1 de F_1 tel que $\Omega[z_1] < \Omega[z_0]$.

Lemme. *La fonctionnelle quasi monotone $\Omega[z]$ telle que l'ensemble $M_0 \cap F_{1,\delta}$ est vide atteint sa borne inférieure, sur l'ensemble $F_{1,\delta}$, sur l'élément z_δ pour lequel $\rho_U(Az_\delta, u_\delta) = \delta$.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que

$$\inf_{z \in F_{1,\delta}} \Omega[z]$$

ait lieu sur l'élément z_δ de $F_{1,\delta}$ pour lequel

$$\rho_U(Az_\delta, u_\delta) = \beta < \delta$$

Conformément à la condition imposée à la grandeur de l'erreur δ, on a $z_\delta \notin M_0$. L'opérateur A étant continu sur F, il existe un voisinage $V(z, z_\delta)$ de l'élément z_δ tel que pour tous ses éléments on ait

$$\rho_U(Az, Az_\delta) < \frac{\delta-\beta}{2}.$$

Tout z choisi dans ce voisinage vérifie l'inégalité

$$\rho_U(Az, u_\delta) < \delta,$$

car

$$\rho_U(Az, u_\delta)] \leqslant \rho_U(Az, Az_\delta) + \rho_U(Az_\delta, u_\delta) < \\ < \frac{\delta-\beta}{2} + \beta = \frac{\delta+\beta}{2} < \delta.$$

Par conséquent,

$$V(z, z_\delta) \subset Q_\delta.$$

La fonctionnelle stabilisante $\Omega[z]$ étant quasi monotone, il en découle qu'il existe dans le voisinage $V(z, z_\delta)$ un élément $z_{\delta,1}$ de F_1 pour lequel

$$\Omega[z_{\delta,1}] < \Omega[z_\delta] \qquad (2;\ 2{,}1)$$

Comme l'élément $z_{\delta,1}$ appartient aux ensembles Q_δ et F_1, et donc, à l'ensemble $F_{1,\delta}$, l'inégalité (2; 2,1) contredit l'hypothèse selon

*) Ce terme a été employé par M. Lavrentiev et par d'autres auteurs avant nous, avec cependant une signification différente.

laquelle la fonctionnelle $\Omega[z]$ atteint sa borne inférieure dans l'ensemble $F_{1,\delta}$ sur l'élément z_δ. Le lemme est donc démontré.

En s'appuyant sur ce lemme, on peut, au lieu de chercher à minimiser la fonctionnelle $\Omega[z]$ sur l'ensemble $F_{1,\delta}$, se proposer de chercher le minimum de cette fonctionnelle sur l'ensemble F_1 sous la condition que l'élément cherché z vérifie l'égalité

$$\rho_U(Az, u_\delta) = \delta.$$

C'est un problème de recherche d'un extrémum lié. Nous allons le résoudre par la méthode des facteurs indéterminés de Lagrange, c'est-à-dire en cherchant le minimum de la fonctionnelle

$$M^\alpha[z, u_\delta] = \rho_U^2(Az, u_\delta) + \alpha\Omega[z], \qquad (2;\ 2{,}2)$$

le paramètre numérique α étant assujetti à la condition $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$, où z_α est l'élément sur lequel la fonctionnelle $M^\alpha[z, u_\delta]$ atteint sa borne inférieure.

Si la méthode de Lagrange est réalisable, c'est-à-dire s'il existe un α tel que $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$, alors le problème variationnel initial équivaut à la recherche du minimum de la fonctionnelle $M^\alpha[z, u_\delta]$. En effet, si α est choisi de telle façon que $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$, la solution z_δ du problème variationnel initial minimise également la fonctionnelle $M^\alpha[z, u_\delta]$, et inversement, si z_α minimise la fonctionnelle $M^\alpha[z, u_\delta]$ sous la condition $\rho_U(Az, u_\delta) = \delta$, alors la fonctionnelle $\Omega[z]$ atteint son minimum sur ce même élément z_α. Les conditions suffisantes de réalisabilité de la méthode de Lagrange sont examinées en détail au § 6 de ce chapitre *).

On peut considérer l'élément z_α comme le résultat d'application au second membre $u = u_\delta$ de l'équation (2; 0,1) d'un opérateur R_1 dépendant du paramètre α:

$$z_\alpha = R_1(u_\delta, \alpha),$$

où $\alpha = \alpha(\delta)$ se définit d'après le résidu (voir § 6).

On prend donc en qualité de solution approchée de l'équation (2; 0,1) celle d'un *autre* problème (problème de minimisation de la fonctionnelle $M^\alpha[z, u]$), « voisin » du problème initial pour de petites valeurs de l'erreur de définition du second membre u_δ **).

4. Il est à noter qu'on peut introduire la fonctionnelle $M^\alpha[z, u]$ de façon formelle, sans rapport avec le problème de recherche d'un extrémum lié de la fonctionnelle $\Omega[z]$, et chercher l'élément z_α susceptible de la minimiser sur l'ensemble F_1. Il se pose alors le problème de trouver le paramètre de régularisation α comme une

*) On peut citer un exemple dans lequel la méthode de Lagrange n'est pas applicable à la recherche de l'extrémum lié, c'est-à-dire que α ne se laisse pas définir par la condition $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$.

**) Voir théorème 2 au § 3 du présent chapitre.

fonction dépendant de δ et d'autres paramètres du problème, $\alpha = \alpha(\delta)$, fonction pour laquelle l'opérateur $R_1(u, \alpha(\delta))$ définissant l'élément

$$z_\alpha = R_1(u, \alpha(\delta))$$

serait régularisant pour l'équation (2; 0,1). Sous certaines conditions, une pareille fonction existe et peut être trouvée de la relation $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$, par exemple. Nous verrons dans la suite (voir § 3) qu'il y a une multitude de pareilles fonctions $\alpha(\delta)$. La possibilité d'utiliser les différentes fonctions $\alpha(\delta)$ dans l'opérateur régularisant $R_1(u, \alpha(\delta))$ est liée au fait que l'opérateur régularisant pour l'équation (2; 0,1) n'est pas unique. Les méthodes de détermination du paramètre de régularisation seront étudiées d'une façon plus approfondie aux §§ 3 et 6.

Compte tenu de ce qui vient d'être dit, il est naturel de chercher une valeur optimale (dans un sens déterminé au préalable) du paramètre de régularisation $\alpha = \alpha(\delta)$. Ce problème sera examiné au chapitre V pour quelques opérateurs A du type de convolution.

5. Il est à noter que, bien que le problème initial (2; 0,1) ne soit pas stable, le problème de minimisation de la fonctionnelle $M^\alpha[z, u]$, comme il sera montré au § 3, est stable vis-à-vis de faibles variations du second membre u. Cette stabilité a été atteinte grâce à la restriction de la classe des solutions possibles au moyen de l'introduction de la fonctionnelle $\Omega[z]$ ayant les propriétés décrites ci-dessus. Elle joue donc un rôle stabilisant, d'où son nom de *fonctionnelle stabilisatrice* pour le problème (2; 0,1), ou simplement de *stabilisateur*.

Le choix de la fonctionnelle stabilisatrice $\Omega[z]$ est souvent dicté par le caractère même du problème. Or, dans bien des cas, elle ne peut être choisie de façon unique. Nous donnerons à la fonctionnelle $M^\alpha[z, u]$ l'appellation de fonctionnelle *lissante*.

6. Nous venons de décrire une des méthodes de construction des opérateurs régularisants, fondée sur un principe variationnel: nous dirons désormais que c'est une *méthode variationnelle* de construction des opérateurs régularisants (O. R.). On en connaît d'autres. Une de ces méthodes, fondée sur l'utilisation du spectre de l'opérateur A, est exposée dans les travaux [16, 18, 19] (voir aussi [104, 185 à 187]). Au chapitre IV, nous donnons une méthode de construction des O. R. pour les opérateurs A du type de convolution au moyen des transformations intégrales de Fourier, Laplace, Mellin, etc. Dans [5 à 7] et [149] on considère aussi les O. R. pour les équations du type de convolution.

7. Pour la construction des solutions approchées de l'équation $Az = u$, stables vis-à-vis de faibles variations des données initiales, on peut aussi employer une méthode itérative (voir [17, 91, 92, 99, 112, 117, 151, 153]) $z_n = R(u, z_{n-1}, \ldots, z_{n-k})$, $k < n$. Pour assurer

la stabilité des solutions vis-à-vis de faibles variations des données initiales, il y a lieu d'adapter le numéro de l'itération z_n, retenue comme solution approchée, au niveau de l'erreur sur les données initiales, $n = n(\delta)$.

Quelquefois, il est possible d'estimer *a priori* l'écart de z_n par rapport à z_{ex} (voir [99, 117])

$$\rho_F(z_n, z_{ex}) \leqslant B(\delta, n)$$

et, en minimisant $B(\delta, n)$, de trouver $n(\delta)$. Dans certains cas, on recherche $n(\delta)$ en considérant le résidu.

8. Nous venons d'examiner en détail les méthodes de construction des solutions approchées des problèmes mal posés du type (2; 0,1) stables vis-à-vis de faibles variations de l'information initiale, quand le second membre de (2; 0,1) était défini approximativement tandis que l'opérateur A était supposé connu avec précision. Considérons maintenant la construction de la solution de l'équation (2; 0,1) dans les cas où le second membre et l'opérateur A sont tous les deux connus approximativement [46, 47].

Soit z_{ex} la solution exacte du problème mal posé (2; 0,1) à second membre $u = u_{ex}$, $z_{ex} \in F$, $u_{ex} \in U$; l'opérateur A réalise une application biunivoque et continue de F dans U. Si, au lieu des données initiales exactes $\{A, u_{ex}\}$ du problème (2; 0,1), on connaît une famille biparamétrique de données initiales approchées $[A_h, u_\delta]$ dont le degré d'exactitude se caractérise par un couple $\gamma = (h, \delta)$ de nombres non négatifs h et δ, on ne peut chercher qu'une solution approchée (de z_{ex}) de l'équation

$$A_h z = u_\delta. \qquad (2;\ 2,3)$$

Soit $\Omega[z]$ une fonctionnelle stabilisante quasi monotone définie sur l'ensemble $F_1 \subset F$. Nous admettrons que les nombres δ et h caractérisent le degré d'approximation des données initiales $\{A_h, u_\delta\}$ au sens suivant:

$$\rho_U(u_{ex}, u_\delta) \leqslant \delta, \quad h = \sup_{\substack{z \in F_1 \\ \Omega[z] \neq 0}} \frac{\rho_U(Az, A_h z)}{\{\Omega[z]\}^{1/2}}, \quad h < \infty.$$

Admettons que l'opérateur A_h pour tout $h \geqslant 0$ réalise une application continue et biunivoque de F sur U et que $A_0 = A$. Conformément à l'idée de la méthode de régularisation du § 2, on peut formuler comme suit le problème cité de recherche d'une solution approchée de l'équation (2; 2,3) stable vis-à-vis de faibles variations de l'information initiale: trouver, parmi les éléments z appartenant à F_1 et tels que $\rho_U^2(A_h z, u_\delta) \leqslant \delta^2 + h^2\Omega[z]$, un élément z_γ réalisant la borne inférieure exacte de la fonctionnelle $\Omega[z]$ sur l'ensemble F_1.

En procédant d'une façon analogue au § 2, on démontre sans peine le

Lemme. *La fonctionnelle* $\Omega[z]$ *atteint sa borne inférieure sur l'élément* z_γ *de* F_1 *vérifiant l'égalité*

$$\rho_U^2(A_h z_\gamma, u_\delta) = \delta^2 + h^2\Omega[z_\gamma].$$

Démonstration. Supposons, en effet, que $\inf\limits_{z \in F_1} \Omega[z]$ ait lieu sur un élément $z_0 \in F_1$ pour lequel

$$\rho_U^2(A_h z_0, u_\delta) = \delta_0^2 < \delta^2 + h^2\Omega[z_0] = \Delta_0^2.$$

En vertu de la continuité de l'opérateur A_h (de F dans U), il existe pour tout nombre δ_1 tel que $\delta_0 < \delta_1 < \Delta_0$ un voisinage de l'élément z_0, $V_1(z, z_0)$, dans lequel tous les éléments z vérifient l'inégalité $\rho_U(A_h z; u_\delta) < \delta_1$. La fonctionnelle $\Omega[z]$ étant continue, il existe un voisinage de l'élément z_0, $V_2(z, z_0)$, tous les éléments z duquel vérifient l'inégalité $\delta_1^2 < \delta^2 + h^2\Omega[z]$. Donc, tous les éléments z appartenant à l'intersection des voisinages $V_1(z, z_0)$ et $V_2(z, z_0)$ vérifient l'inégalité

$$\rho_U^2(A_h z, u_\delta) < \delta^2 + h^2\Omega[z]. \qquad (2;\ 2{,}4)$$

Comme la fonctionnelle $\Omega[z]$ est quasi monotone, il existe dans tout voisinage de l'élément z_0, $V_3(z, z_0)$, appartenant à l'intersection $V_1(z, z_0) \cap V_2(z, z_0)$, un élément z_1 vérifiant l'inégalité $\Omega[z_1] < < \Omega[z_0]$. Le fait que l'élément z_1 vérifie l'inégalité (2; 2,4) signifie que $\inf\limits_{z \in F_1} \Omega[z]$ n'est pas atteint sur l'élément z_0. Or, cela contredit l'hypothèse. Le lemme est donc démontré.

Conformément à ce lemme, le problème de minimisation de la fonctionnelle $\Omega[z]$ sur l'ensemble F_1, sous la condition $\rho_U^2(A_h z, u_\delta) \leqslant \leqslant \delta^2 + h^2\Omega[z]$, se réduit à minimiser $\Omega[z]$ à condition que $\rho_U^2(A_h z, u_\delta) = \delta^2 + h^2\Omega[z]$; ce dernier problème se résout par la méthode du § 2, en minimisant la fonctionnelle lissante correspondante

$$\overline{M}^\alpha[z, u_\delta, A_h] = \rho_U^2(A_h z, u_\delta) + (\alpha - h^2)\Omega[z].$$

Le paramètre α peut être déterminé d'après le résidu, à partir de la condition

$$\rho_U^2(A_h z_\gamma^\alpha, u_\delta) - h^2\Omega[z_\gamma^\alpha] = \delta^2.$$

L'opérateur $R_2(u_\delta, A_h, h, \delta)$ qui fait correspondre aux données initiales $\{A_h, u_\delta\}$ du problème un élément z_γ, $\gamma = (h, \delta)$, minimisant la fonctionnelle $\Omega[z]$ sur l'ensemble des éléments de F_1 sur lesquels est vérifiée l'égalité $\rho_U^2(A_h z, u_\delta) = \delta^2 + h^2\Omega[z]$, est un opérateur régularisant pour le problème (2; 2,3).

Il est à noter que l'élément z_γ peut ne pas être unique.

§ 3. Sur la construction d'opérateurs régularisants par la méthode de minimisation de la fonctionnelle lissante

Lorsqu'on construit un opérateur régularisant pour l'équation (2; 0,1) par la méthode de minimisation de la fonctionnelle lissante $M^\alpha[z, u]$ et qu'on détermine le paramètre α d'après le résidu en partant de la condition

$$\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta,$$

cette méthode de construction de l'O. R. est équivalente, comme on l'a vu au § 2, à celle de minimisation de la fonctionnelle $\Omega[z]$ sur l'ensemble des éléments z pour lesquels

$$\rho_U(Az, u_\delta) \leqslant \delta.$$

Nous avons signalé au § 2 qu'il est possible d'introduire la fonctionnelle lissante $M^\alpha[z, u]$ de façon formelle, sans qu'elle soit liée au problème variationnel de recherche d'un extrémum lié de la fonctionnelle $\Omega[z]$, et de construire l'opérateur régularisant en cherchant à minimiser la fonctionnelle $M^\alpha[z, u]$. On considère alors α comme étant une fonctionnelle de δ, au sens de la définition 2) de l'O. R. Il sera montré dans ce paragraphe que cette approche permet d'obtenir une classe étendue d'opérateurs régularisants.

Notons que la méthode de régularisation décrite ci-après pour l'obtention d'une solution approchée de l'équation (2; 0,1), ainsi que sa justification peuvent être utilisées sans aucune modification pour la recherche approchée d'une quasi-solution de cette même équation.

1. Soient l'ensemble F des solutions possibles de l'équation (2; 0,1) un espace métrique et $\Omega[z]$, la fonctionnelle stabilisante définie sur un ensemble $F_1 \subset F$. On a alors le

Théorème 1. *Soit A un opérateur continu de F dans U. Quels que soient $u \in U$ et le paramètre $\alpha > 0$, il existe un élément $z_\alpha \in F_1$ sur lequel la fonctionnelle*

$$M^\alpha[z, u] = \rho_U^2(Az, u) + \alpha\Omega[z]$$

atteint sa borne inférieure, c'est-à-dire que

$$\inf_{z \in F_1} M^\alpha[z, u] = M^\alpha[z_\alpha, u].$$

D é m o n s t r a t i o n. Comme pour tout $z \in F_1$ on a $M^\alpha \geqslant 0$, il existe une borne inférieure exacte $\inf M^\alpha = M_0^\alpha$, avec l'infimum défini suivant tous les éléments admissibles de F_1. Il y a une suite minimisante $\{z_n^\alpha\}$ d'éléments de F_1 telle que $\lim_{n\to\infty} M_n^\alpha = M_0^\alpha$, où $M_n^\alpha = M^\alpha[z_n^\alpha, u]$. On peut évidemment admettre que pour tout n

$$M_{n+1}^\alpha \leqslant M_n^\alpha \leqslant M_1^\alpha.$$

Alors pour tout n et pour un $\alpha > 0$ arbitraire fixé on a

$$\Omega [z_n^\alpha] \leqslant \frac{1}{\alpha} M_1^\alpha = Q.$$

La suite $\{z_n^\alpha\}$ appartient donc à l'ensemble des éléments z de F_1 pour lesquels $\Omega [z] \leqslant Q$. Comme cet ensemble est un compact dans F_1, on peut extraire de la suite $\{z_n^\alpha\}$ une sous-suite $\{z_{n_k}^\alpha\}$ qui converge (dans la métrique de F) vers un certain élément z_α de F_1. De la continuité de l'opérateur A il résulte que

$$\inf_{z \in F_1} M^\alpha [z, u] = \lim_{n \to \infty} M^\alpha [z_n^\alpha, u] = \lim_{n_k \to \infty} M^\alpha [z_{n_k}^\alpha, u] =$$
$$= \lim_{n_k \to \infty} \{\rho_U^2 (Az_{n_k}^\alpha, u) + \alpha\Omega [z_{n_k}^\alpha]\} = \rho_U^2 (Az_\alpha, u) + \alpha\Omega [z_\alpha].$$

Le théorème est démontré.

Ainsi donc, sur les éléments $u \in U$ et pour tous les nombres positifs $\alpha > 0$ est défini un opérateur $R_1 (u, \alpha)$ à valeurs dans F_1 tel que

$$z_\alpha = R_1 (u, \alpha)$$

minimise la fonctionnelle $M^\alpha [z, u]$.

On peut indiquer les conditions suffisantes pour que l'élément z_α soit unique. Il faut pour cela, par exemple, que l'opérateur A soit linéaire, F soit un espace hilbertien et $\Omega [z]$ soit une fonctionnelle stabilisante quadratique.

En effet, imaginons qu'il existe deux éléments $z_\alpha^{(1)}$ et $z_\alpha^{(2)}$ réalisant la borne inférieure exacte de la fonctionnelle $M^\alpha [z, u]$. Considérons les éléments de l'espace F_1 situés sur le segment de droite (dans l'espace F) reliant $z_\alpha^{(1)}$ et $z_\alpha^{(2)}$

$$z = z_\alpha^{(1)} + \beta (z_\alpha^{(2)} - z_\alpha^{(1)}).$$

Sur les éléments de cette droite, la fonctionnelle $M^\alpha [z, u]$ est une fonction quadratique non négative de β ; elle ne peut donc passer par un minimum pour deux valeurs différentes de β. Pour un opérateur A non linéaire, l'opérateur z_α peut ne pas être unique.

2. Nous allons montrer que l'opérateur $R_1 (u, \alpha)$ est régularisant pour l'équation (2 ; 0,1).

Définissons sur le segment $[0, \delta_1]$ une classe T_{δ_1} de fonctions non négatives, non décroissantes et continues sur ce segment.

Théorème 2. *Soit z_{ex} solution de l'équation* (2 ; 0,1) *à second membre $u = u_{ex}$, c'est-à-dire que $Az_{ex} = u_{ex}$. Alors, pour tout nombre positif $\varepsilon > 0$ et quelles que soient les fonctions* $\beta_1 (\delta)$, $\beta_2 (\delta)$ *de la classe*

T_{δ_1} *telles que* $\beta_2(0) = 0$ et $\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leqslant \beta_2(\delta)$, *il existe un* $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, \beta_1, \beta_2) \leqslant \delta_1$ *tel que pour* $\tilde{u} \in U$ et $\delta \leqslant \delta_0$ *l'inégalité* $\rho_U(\tilde{u}, u_{ex}) \leqslant \delta$ *entraîne l'inégalité* $\rho_F(z_{ex}, \tilde{z}_\alpha)$, *où* $\tilde{z}_\alpha = R_1(\tilde{u}, \alpha)$, *pour tous les* α *vérifiant les inégalités*

$$\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leqslant \alpha \leqslant \beta_2(\delta).$$

D é m o n s t r a t i o n. Comme la fonctionnelle $M^\alpha[z, \tilde{u}]$ passe par un minimum pour $z = \tilde{z}_\alpha$, on a

$$M^\alpha[\tilde{z}_\alpha, \tilde{u}] \leqslant M^\alpha[z_{ex}, \tilde{u}].$$

Aussi

$$\alpha\Omega[\tilde{z}_\alpha] \leqslant M^\alpha[\tilde{z}_\alpha, \tilde{u}] \leqslant M^\alpha[z_{ex}, \tilde{u}] = \\ = \rho_U^2(Az_{ex}, \tilde{u}) + \alpha\Omega[z_{ex}] = \rho_U^2(u_{ex}, \tilde{u}) + \\ + \alpha\Omega[z_{ex}] \leqslant \delta^2 + \alpha\Omega[z_{ex}] = \alpha\left\{\frac{\delta^2}{\alpha} + \Omega[z_{ex}]\right\}.$$

De l'inégalité $\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leqslant \alpha$ il suit que $\frac{\delta^2}{\alpha} \leqslant \beta_1(\delta) \leqslant \beta_1(\delta_1)$ et $\frac{\delta^2}{\alpha} + \Omega[z_{ex}] \leqslant \beta_1(\delta_1) + \Omega[z_{ex}] = H_0$.

Ainsi donc,

$$\Omega[\tilde{z}_\alpha] \leqslant H_0 \quad \text{et} \quad \Omega[z_{ex}] \leqslant H_0.$$

Par conséquent, les éléments z_{ex} et $\tilde{z}_\alpha$ appartiennent à l'ensemble F_{H_0} compact dans F_1 des éléments z de F_1 pour lesquels

$$\Omega[z] \leqslant H_0.$$

Soit U_{H_0} l'image de l'ensemble F_{H_0} par l'application $u = Az$. Comme l'application $F_{H_0} \to U_{H_0}$ est continue (car l'opérateur A l'est), l'équation $Az = u$ n'admet qu'une solution unique pour tout $u \in U_{H_0}$ et l'ensemble F_{H_0} est un compact, alors conformément au lemme du ch. I, l'application inverse $U_{H_0} \to F_{H_0}$ est aussi continue (dans la métrique de F). Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ on trouve un $\gamma(\varepsilon) > 0$ tel que l'inégalité

$$\rho_U(u_1, u_2) \leqslant \gamma(\varepsilon), \quad u_1, u_2 \in U_{H_0}$$

entraîne l'inégalité

$$\rho_F(z_1, z_2) \leqslant \varepsilon,$$

si $u_1 = Az_1$, $u_2 = Az_2$.

Ensuite, pour $\tilde{u}$ et $\tilde{u}_\alpha = A\tilde{z}_\alpha$ on a

$$\rho_U^2(\tilde{u}_\alpha, \tilde{u}) = \rho_U^2(A\tilde{z}_\alpha, \tilde{u}) \leqslant M^\alpha[\tilde{z}_\alpha, \tilde{u}] \leqslant M^\alpha[z_{ex}, \tilde{u}] = $$
$$= \rho_U^2(Az_{ex}, \tilde{u}) + \alpha\Omega[z_{ex}] =$$
$$= \rho_U^2(u_{ex}, \tilde{u}) + \alpha\Omega[z_{ex}] \leqslant \delta^2 + \alpha\Omega[z_{ex}]. \qquad (2;\ 3,1)$$

En vertu de l'inégalité $\alpha \leqslant \beta_2(\delta)$, on a

$$\rho_U(\tilde{u}_\alpha, \tilde{u}) \leqslant \{\delta^2 + \beta_2(\delta)\Omega[z_{ex}]\}^{1/2} = \varphi(\delta),$$

où $\varphi(\delta)$ est une fonction monotonement croissante et continue sur $[0, \delta_1]$ et $\varphi(0) = 0$. Il est évident que

$$\rho_U(\tilde{u}_\alpha, u_{ex}) \leqslant \rho_U(\tilde{u}_\alpha, \tilde{u}) + \rho_U(\tilde{u}, u_{ex}). \qquad (2;\ 3,2)$$

Utilisant (2; 3,1) et l'inégalité

$$\rho_U(\tilde{u}, u_{ex}) \leqslant \delta,$$

on trouve

$$\rho_U(\tilde{u}_\alpha, u_{ex}) \leqslant \delta + \varphi(\delta) = \psi(\delta), \qquad (2;\ 3,3)$$

où $\psi(\delta)$ est une fonction monotonement croissante et continue sur $[0, \delta_1]$ pour laquelle $\psi(0) = 0$. Posant $\delta_0 = \psi^{-1}(\gamma(\varepsilon))$, où $\psi^{-1}(y)$ est l'inverse de la fonction $y = \psi(\delta)$, et utilisant la continuité de l'application $U_{H_0} \to F_{H_0}$, on déduit de l'inégalité

$$\rho_U(\tilde{u}, u_{ex}) \leqslant \delta \leqslant \delta_0,$$

pour tous les α vérifiant les inégalités

$$\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leqslant \alpha \leqslant \beta_2(\delta),$$

l'inégalité

$$\rho_F(z_{ex}, \tilde{z}_\alpha) \leqslant \varepsilon.$$

Le théorème est démontré.

On trouvera les estimations des erreurs entachant les solutions approchées dans les travaux [26, 27, 77, 80, 85, 86, 117].

Ce théorème montre qu'en construisant les opérateurs régularisants par minimisation de la fonctionnelle lissante $M^\alpha[z, u]$, on n'arrive pas à définir de façon unique le paramètre de régularisation α en fonction de l'erreur δ entachant le second membre. Cette fonction se laisse définir non seulement en considérant le résidu, c'est-à-dire à partir de la condition $\rho_U(Az_\alpha^\delta, u_\delta) = \delta$ comme indiqué au § 2, mais aussi par d'autres procédés (voir § 6).

Remarque 1. Bien souvent, d'après le sens même du problème, la solution cherchée $z_{ex}(x)$ se voit astreinte à certaines restrictions, du type des inégalités $\varphi_1(x) \leqslant z_{ex}(x) \leqslant \varphi_2(x)$, dans lesquelles $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont des fonctions connues. Par exemple, on peut exiger que la solution soit non négative ($\varphi_1(x) \equiv 0$). En pareils cas on prendra en qualité de l'espace F des solutions possibles les fonctions $z(x)$ vérifiant les mêmes inégalités. Les théorèmes 1 et 2 de ce paragraphe restent vrais dans ces cas aussi.

3. Supposons qu'un ensemble Φ de l'espace métrique F admet une métrisation $\rho_\Phi(z_1, z_2)$, majorante par rapport à la métrique $\rho_F(z_1, z_2)$ de l'espace F, c'est-à-dire que pour deux éléments quelconques z_1 et z_2 de l'ensemble Φ on a

$$\rho_F(z_1, z_2) \leqslant \rho_\Phi(z_1, z_2).$$

Si la sphère

$$\rho_\Phi(z, z_0) \leqslant d$$

de centre en z_0 est compacte dans F (dans la métrique de F), le théorème 1 a lieu, c'est-à-dire qu'il existe un élément $z_\alpha \in \Phi$ minimisant la fonctionnelle

$$M^\alpha[z, \tilde{u}] = \rho_U^2(Az, \tilde{u}) + \alpha\Omega[z], \tag{2; 3,4}$$

où

$$\Omega[z] = \rho_\Phi^2(z; 0).$$

Si la solution exacte cherchée z_{ex} de l'équation (2; 0,1) appartient à l'ensemble Φ, alors l'opérateur $R_2(\tilde{u}, \alpha)$ définissant pour tout $\alpha > 0$ et tout $\tilde{u} \in U$ un élément $\tilde{z}_\alpha$ minimisant la fonctionnelle (2; 3,4) est un opérateur régularisant. Les propositions de ce point se démontrent de façon analogue à celles des points 1 et 2.

Ainsi, si F est l'ensemble des fonctions $z(x)$ continues sur l'intervalle $[a, b]$, $a \leqslant x \leqslant b$, muni de la métrique

$$\rho_F(z_1, z_2) = \sup_{x \in [a, b]} |z_1(x) - z_2(x)|,$$

on peut adopter en qualité de l'ensemble Φ l'ensemble C_1 des fonctions continûment dérivables sur l'intervalle $[a, b]$, muni de la métrique

$$\rho_\Phi(z_1, z_2) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \{ |z_1(x) - z_2(x)| + |z_1'(x) - z_2'(x)| \}.$$

En vertu du théorème d'Arzelà, de toute suite de fonctions continues $\{z_n(x)\}$, telles que

$$\rho_\Phi(z_n, z_0) \leqslant d,$$

on peut extraire une sous-suite $\{z_{n_k}(x)\}$ uniformément convergente vers une fonction également continue $z_0(x) \in F$, c'est-à-dire con-

vergente vers $z_0(x)$ au sens de la métrique de F. Par conséquent, la sphère $\{z; \rho_\Phi(z; \bar{z}_0) \leqslant d\}$ est compacte dans C.

Prenons un autre exemple. Soient F l'espace des fonctions $z(x)$ continues sur l'intervalle $[a, b]$, muni de la métrique de C

$$\rho_F(z_1, z_2) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |z_1(x) - z_2(x)|,$$

et Φ l'espace des fonctions de carré intégrable admettant des dérivées généralisées jusqu'à l'ordre p, c'est-à-dire que Φ est un espace de Sobolev W_2^p. La métrique dans W_2^p se définit par la formule

$$\rho_\Phi(z_1, z_2) = \left\{ \int_a^b \sum_{r=0}^{p} q_r(x) \left(\frac{d^r z}{dx^r}\right)^2 dx \right\}^{1/2}, \qquad z = z_1 - z_2,$$

où $q_0(x), q_1(x), \ldots, q_p(x)$ sont des fonctions continues non négatives connues, mais $q_p > 0$. Il est notoire que pour tout p l'espace W_2^p est un espace hilbertien et qu'une sphère dans cet espace est compacte dans C. Donc, si l'on cherche les solutions régularisées de l'équation (2; 0,1) dans l'espace W_2^p, les théorèmes 1 et 2 sont aussi bien vrais pour ces solutions.

R e m a r q u e 2. Etant donné que dans ce cas, la solution régularisée $z_\alpha(x)$ minimise la fonctionnelle stabilisante

$$\Omega[z] = \int_a^b \sum_{r=0}^{p} q_r(x) \left(\frac{d^r z}{dx^r}\right)^2 dx \qquad (2; 3,5)$$

(sous la condition $\rho_U(u, Az) = \delta$), elle sera, de toute évidence, la fonction « la plus lisse » (jusqu'à l'« ordre p ») pour laquelle $\rho_U(Az, u) = \delta$. Ainsi donc, nous approchons ici la solution cherchée z_{ex} par les fonctions « les plus lisses » (jusqu'à l'« ordre p »).

Les stabilisateurs du type (2; 3,5), où $q_r(x) \geqslant 0$ $(r = 0, 1, \ldots, p-1)$, $q_p(x) > 0$, seront appelés *stabilisateurs d'ordre p*; si toutes les fonctions $q_r(x)$ sont des constantes, on dira qu'il s'agit de *stabilisateurs d'ordre p à coefficients constants* *).

Dans [25] sont étudiées les conditions d'existence des opérateurs régularisants.

R e m a r q u e 3. Les résultats obtenus aux §§ 1, 2 et 3 se rapportent aux équations (2; 0,1) dont l'opérateur A était continu. Cependant, ces résultats restent vrais aussi pour les équations dans lesquelles l'opérateur A est fermé (voir [61, 106 à 108, 114]).

R e m a r q u e 4. La méthode de régularisation qu'on vient de décrire est aussi applicable à la résolution des équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce.

*) Dans la littérature mathématique, on les appelle quelquefois *stabilisateurs de Tikhonov* (voir par exemple [144 à 146]).

Les différentes questions relatives aux problèmes mal posés sont traitées dans toute une série de travaux: [1, 4, 8, 21, 22, 54, 81, 88, 89, 110, 113, 123, 147, 150, 152, 154, 163, 169, 174, 191, 193, 197-200, 204-206, 208, 213, 215, 216, 218, 219].

4. Dans les chapitres I et II ont été définies les notions de quasi-solution et de solution régularisée de l'équation $Az = u$. Ici nous allons montrer le lien entre ces notions, établi dans [74].

Soit

$$Az = u, \tag{2; 3,6}$$

$z \in F$, $u \in U$, où F et U sont deux espaces de Banach, A un opérateur linéaire de F dans U à domaine de valeurs $R(A)$ partout dense sur U et tel que son inverse A^{-1} existe mais n'est pas continu.

Soit ensuite $\Omega[z]$ une fonctionnelle convexe non négative continue, définie sur une variété linéaire F_1 dense partout sur F et vérifiant les conditions suivantes:

a) $\Omega[0] = 0$;

b) pour tout élément fixé z de F_1, $z \neq 0$, $\varphi(\beta) = \Omega[\beta z]$ est une fonction strictement croissante de la variable β et telle que $\lim_{\beta \to +\infty} \varphi(\beta) = +\infty$;

c) pour tout $d \geqslant 0$ l'ensemble

$$F_d^1 \equiv \{z,\ z \in F_1,\ \Omega[z] \leqslant d\}$$

est un compact.

Il est évident que $\Omega[z]$ est une fonctionnelle stabilisatrice pour l'équation (2; 3,6) et que

$$F_1 = \bigcup_{d \geqslant 0} F_d^1.$$

Signalons que des fonctionnelles stabilisatrices d'ordre p (voir point 3) possèdent les propriétés énumérées.

Soit z_d quasi-solution de (2; 3,6) sur le compact F_d^1, c'est-à-dire que z_d est un élément minimisant la fonctionnelle $\| Az - u \|^2$ sur le compact F_d^1. On montre dans [79] que $\Omega[z_d] = d$. Donc, pour un $d > 0$ donné, la recherche de la quasi-solution z_d sur le compact F_d^1 revient à minimiser la fonctionnelle

$$\rho_U^2(Az,\ u) = \| Az - u \|^2$$

sous la condition $\Omega[z] = d$, c'est-à-dire à rechercher le minimum libre de la fonctionnelle

$$M^\alpha[z,\ u] = \rho_U^2(Az,\ u) + \alpha\Omega[z]$$

sur l'ensemble F_d^1.

Soit z_α l'élément minimisant la fonctionnelle $M^\alpha[z,\ u]$. Conformément au § 3, l'élément z_α est une solution régularisée de l'équation (2; 3,6) sur l'ensemble F_d^1. Ainsi donc, la quasi-solution de

(2; 3,6) sur le compact F_d^1 est une solution régularisée de cette équation. Portant l'élément z_α dans l'équation (2; 3,6), on obtient le résidu $\rho_U(Az_\alpha, u) = \delta_\alpha$.

Les trois paramètres numériques d, α et δ_α sont liés entre eux par deux relations:

$$\Omega[z_\alpha] = d, \quad \rho_U(Az_\alpha, u) = \delta_\alpha. \qquad (2;\ 3,7)$$

Connaissant un paramètre, on tire de (2; 3,7) les deux autres. Dans la méthode de régularisation, c'est en général le paramètre δ_α, valeur de l'erreur du second membre de (2; 3,6), qui est connu.

Etant donné que, pour $d_1 < d_2$, on a $F_{d_1}^1 \subset F_{d_2}^1$, la solution régularisée de l'équation (2; 3,6) sur l'ensemble $F_{1,\delta} = F_1 \cap Q_\delta$ (voir ch. II, § 2) appartient à l'ensemble $F_1 = \bigcup_{d>0} F_d^1$.

5. On peut chercher la solution régularisée de l'équation $Az = u$ aussi sous la forme d'une série. Soient F et U deux espaces hilbertiens et A un opérateur complètement continu de F dans U. Soit ensuite F_1 un sous-espace hilbertien de l'espace F muni d'une norme majorante telle que pour tout $d > 0$ l'ensemble des éléments z de F_1 pour lesquels $\|z\| \leqslant d$ est compact dans F. On peut prendre alors comme stabilisateur la fonctionnelle $\Omega[z] = \|z\|^2$. Dans ce cas l'équation d'Euler pour la fonctionnelle lissante $M^\alpha[z, u]$ s'écrit

$$A^*Az + \alpha z = A^*u. \qquad (2;\ 3,8)$$

A^*A est un opérateur auto-adjoint. Soient $\{\varphi_n\}$ un système complet de ses éléments propres et $\{\lambda_n\}$ les valeurs propres correspondantes.

On sait que A^*u peut être mis sous la forme d'une série

$$A^*u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n.$$

Si l'on cherche la solution de l'équation sous la forme de la série

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n,$$

on obtient pour ses coefficients les formules

$$b_n = \frac{c_n}{\lambda_n + \alpha}.$$

Le paramètre α se définit d'après la valeur du résidu (cf. le théorème 3 à la page 35).

Les méthodes variationnelles de résolution de problèmes mal posés sont étudiées aussi dans [23].

§ 4. Application de la méthode de régularisation à la résolution approchée des équations intégrales de première espèce

1. Comme il a été montré au § 3, pour trouver une solution approchée (régularisée) de l'équation (2; 0,1), il suffit de définir l'élément $z_\alpha \in F$ minimisant la fonctionnelle $M^\alpha[z, u]$. Ce dernier problème peut être résolu soit par des méthodes directes de minimisation de la fonctionnelle (par exemple, par la méthode de la plus grande pente), soit en résolvant l'équation d'Euler correspondant à la fonctionnelle $M^\alpha[z, u]$ et se présentant comme suit:

$$A^*Az + \alpha\Omega'[z] = A^*u,$$

où A^* est l'opérateur adjoint de A, $\Omega'[z]$ la dérivée de la fonctionnelle $\Omega[z]$ (au sens de Fréchet).

2. Supposons qu'on demande de trouver une solution régularisée d'une équation intégrale de Fredholm de première espèce sur un intervalle fini $[a, b]$ (voir [156])

$$\int_a^b K(x, s) z(s) ds = u(x), \qquad (2; 4,1)$$

où $c \leqslant x \leqslant d$, $u(x) \in L_2[c, d]$.

Nous allons nous servir d'un stabilisateur du premier ordre. On cherchera donc la solution régularisée $z_\alpha(s)$ dans l'espace W_2^1. Elle minimise la fonctionnelle

$$M^\alpha[z, u] = \int_c^d \left\{ \int_a^b K(x, s) z(s) ds - u(x) \right\}^2 dx + \\ + \alpha \int_a^b \left\{ q_0(s) z^2(s) + q_1(s) \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \right\} ds. \qquad (2; 4,2)$$

Pour que la fonctionnelle passe par un minimum, il faut que sa première variation soit nulle. Cette condition s'écrit sous la forme

$$\int_a^b \Big(-\alpha \left\{ \frac{d}{ds}\left[q_1(s) \frac{dz}{ds}\right] - q_0(s) z(s) \right\} + \\ + \int_a^b \overline{K}(s, t) z(t) dt - b(s) \Big) v(s) ds + \alpha q_1(s) z'(s) v(s) \Big|_a^b. \qquad (2; 4,3)$$

Ici $v(s)$ est une variation arbitraire de la fonction $z(s)$, telle que $z(s)$ et $z(s)+v(s)$ appartiennent à la classe des fonctions admissibles,

$$\overline{K}(s, t)=\int_c^d K(\xi, s) K(\xi, t)\, d\xi,$$

$$b(s)=\int_c^d K(\xi, s)\, u(\xi)\, d\xi.$$

La condition (2; 4,3) est vérifiée si

$$\int_a^b \overline{K}(s, t) z(t)\, dt-\alpha \left\{\frac{d}{ds}\left[q_1(s) \frac{dz}{ds}\right]-q_0(s) z\right\}=b(s) \quad (2\,;\ 4,4)$$

et

$$q_1(s) z'(s) v(s)\Big|_a^b=0. \quad (2\,;\ 4,5)$$

Ainsi donc, connaissant les valeurs de la solution cherchée $z(s)$ de l'équation (2; 4,1) aux deux extrémités de l'intervalle $[a, b]$, on ne peut prendre comme fonctions admissibles, à la recherche du minimum de la fonctionnelle (2; 4,2), que les fonctions $z(s)$ de W qui prennent les valeurs données à ces extrémités. Dans ce cas les fonctions $v(s)$ doivent s'annuler pour $s=a$ et $s=b$, et la condition (2; 4,5) sera vérifiée.

Dans le cas que l'on vient de décrire, le problème de recherche de la solution régularisée $z_\alpha(s)$ se réduit donc à trouver la solution de l'équation intégro-différentielle (2; 4,4) vérifiant les conditions

$$z(a)=\bar{z}_1, \quad z(b)=\bar{z}_2, \quad (2\,;\ 4,6)$$

où $\bar{z}_1$ et $\bar{z}_2$ sont deux nombres connus.

Si les valeurs prises par la solution cherchée $z(s)$ aux extrémités $s=a$ et $s=b$ ne sont pas connues, on peut satisfaire à la condition (2; 4,5) en posant

$$z'(a)=z'(b)=0. \quad (2\,;\ 4,7)$$

Dans ce cas on prendra en qualité de solution régularisée de l'équation (2; 0,1) la solution de l'équation (2; 4,4) vérifiant les conditions (2; 4,7). Il existe évidemment d'autres conditions aux limites qu'on peut imposer à la solution de l'équation (2; 4,4), par exemple, les conditions de la forme

$$z(a)=\bar{z}_1 \quad z'(b)=0 \quad (2\,;\ 4,8)$$

ou encore

$$z'(a)=0, \quad z(b)=\bar{z}_2. \quad (2\,;\ 4,9)$$

R e m a r q u e 1. Aux cas où les valeurs de la solution cherchée aux extrémités de l'intervalle n'étaient pas connues, nous avons posé

$$z'(a) = 0, \quad z'(b) = 0.$$

Or, il se peut que la solution cherchée de l'équation (2; 4,1) ne vérifie pas ces conditions. Si nous connaissons la dérivée de la solution cherchée de l'équation (2; 4,1), par exemple si nous savons qu'elle est égale à g pour $s = a$, alors, en posant dans l'équation (2; 4,1) $z(s) = \tilde{z}(s) + g \cdot s$, nous obtenons une équation du même type (avec le même noyau) mais avec un second membre différent pour la fonction $\tilde{z}(s)$. La solution cherchée vérifiera la condition $\tilde{z}'(a) = 0$.

3. Si nous utilisons pour la résolution de l'équation (2; 4,1) des stabilisateurs d'ordre p, alors l'équation d'Euler pour la fonctionnelle $M^{\alpha}[z, u]$ s'écrit [157]

$$\int_a^b \overline{K}(s, t)\, z(t)\, dt + \alpha \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \frac{d^r}{ds^r}\left[q_r(s) \frac{d^r z}{ds^r}\right] = b(s).$$

Il est tout aussi facile d'écrire les conditions aux limites possibles de la solution cherchée de cette équation. Par exemple,

$$z(a) = z'(a) = \ldots = z^{(p-1)}(a) = 0;$$
$$z(b) = z'(b) = \ldots = z^{(p-1)}(b) = 0.$$

Nous n'allons pas écrire d'autres conditions aux limites possibles.

4. Les problèmes (2; 4,4), (2; 4,6) ou (2; 4,4), (2; 4,7), etc. se résolvent numériquement sur ordinateur. Dans le cas de l'équation (2; 4,4), on lui substitue son approximation aux différences finies avec un réseau donné. Si l'on prend un réseau régulier à pas h, on obtient au lieu de l'équation (2; 4,4) un système d'équations aux différences finies de la forme

$$-\frac{\alpha}{h^2}\left\{q_{1,k-1} \cdot z_{k-1} + q_{1,k} \cdot z_{k+1} - (q_{1,k} + q_{1,k-1}) \cdot z_k - \right.$$
$$\left. - h^2 q_{0,k} \cdot z_k\right\} + \sum_{r=0}^{n} \overline{K}_{k,r} \cdot z_r \cdot h = b_k; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \quad (2; 4,10)$$

Ici $q_{1,k} = q_1(s_k)$, $q_{0,k} = q_0(s_k)$, $z_k = z(s_k)$, $b_k = b(s_k)$, $s_k = kh + a$; $s_n = b$, $\overline{K}_{k,r}$ sont les coefficients de la formule de quadrature d'après laquelle on remplace dans (2; 4,4) l'intégrale par une somme intégrale. Si la solution cherchée de l'équation (2; 4,4) doit vérifier les conditions aux limites (2; 4,6), alors on pose dans le système (2; 4,10)

$$z_0 = \bar{z}_1, \quad z_n = \bar{z}_2.$$

Si ce sont les conditions (2 ; 4,7) que doit vérifier la solution cherchée, on donne au nombre k dans le système (2 ; 4,10) les valeurs

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

en posant

$$z_{-1} = z_0, \quad z_{n+1} = z_n.$$

Il est parfois plus rationnel de chercher la solution sur un réseau non régulier, aux nœuds s_k, dont les distances entre les nœuds voisins ne seront pas en général toutes égales :

$$h_k = s_{k+1} - s_k, \quad h_k \neq h_{k+1}.$$

En pareils cas on approche l'équation (2 ; 4,4) par un système d'équations algébriques linéaires du type

$$-\alpha \left\{ \frac{1}{h_k h_{k-1}} q_{1,\,k} z_{k+1} + \frac{1}{h_{k-1}^2} q_{1,\,k-1} z_{k-1} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{q_{1,\,k}}{h_k h_{k-1}} + \frac{q_{1,\,k-1}}{h_{k-1}^2} \right) z_k \right\} + \alpha q_{0,\,k} z_k +$$
$$+ \sum_{r=0}^{n} \overline{K}_{k,\,r} \cdot z_r \cdot h_r = b_k. \quad (2\,;\,4{,}11)$$

Les conditions aux limites imposées à la solution de ce système seront les mêmes que pour un réseau régulier (voir aussi [48, 182, 183, 188, 210]).

R e m a r q u e 2. Pour la construction d'une solution approchée de l'équation intégrale (2 ; 4,1), on peut aussi remplacer l'intégrale par une somme intégrale correspondante sur un réseau, et l'équation (2 ; 4,1), par un système d'équations algébriques linéaires et résoudre le système obtenu par la méthode de régularisation décrite au ch. III

§ 5. Quelques applications de la méthode de régularisation

Nous allons donner quelques exemples d'emploi de la méthode de régularisation pour la résolution d'équations intégrales de première espèce.

E x e m p l e 1. Considérons un problème de différentiation numérique (voir aussi [24, 51, 56, 57]). La dérivée n-ième $z(t)$ de la fonction $u(t)$ est solution de l'équation intégrale

$$\int_0^t \frac{1}{(n-1)!} (t-\tau)^{n-1} z(\tau)\, d\tau = u(t). \quad (2\,;\,5{,}1)$$

Quand le second membre est défini de façon approchée ($u = u\,(t)$), la dérivée ne peut être calculée, elle aussi, que d'une façon approximative.

Soit $u\,(t) = \int_0^t \exp\,(-y^4)\,dy$. Alors $u'\,(t) = \exp\,(-t^4)$, $u'''\,(t) =$
$= -12t^2 \exp\,(-t^4) + 16t^6 \exp\,(-t^4)$.

Les courbes représentatives des fonctions $u'\,(t)$ et $u'''\,(t)$ sont montrées sur les figures 2 et 3 en trait continu.

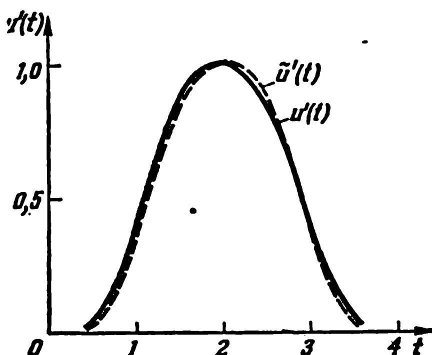


Fig. 2

Supposons qu'au lieu de $u\,(t)$ on a $\tilde{u}\,(t_i) = u\,(t)\,(1 + \theta_i\varepsilon)$, où θ_i sont des nombres aléatoires, $-1 \leqslant \theta_i \leqslant 1$. La méthode de régularisation employée pour le calcul des dérivées première et troisième de la fonction $\tilde{u}\,(t)$ pour une des suites de nombres aléatoires $\{\theta_i\}$ donne les résultats montrés sur les figures 2 et 3 en pointillé. Pour $u'\,(t)$ on a pris $h = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}0055$; pour $u'''\,(t)$ on a pris $h = 0{,}05$, $\varepsilon = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}55 \cdot 10^{-6}$. Le paramètre α a été déterminé d'après le résidu.

Prenons maintenant deux exemples typiques de problèmes liés au dépouillement des résultats d'expériences.

E x e m p l e 2. Il s'agit d'établir la composition spectrale d'un rayonnement (électromagnétique, γ, X, corpusculaire) [162, 164, 175].

Supposons que le rayonnement en question est non homogène et que la distribution de la densité du nombre de particules (photons) est définie par une fonction $z\,(s)$ (s fréquence ou énergie). Faisant passer ce rayonnement au travers d'un instrument de mesure, nous obtenons un spectre expérimental $u\,(x)$ (x peut être fréquence ou

énergie). Si l'instrument est linéaire, la relation fonctionnelle entre $z(s)$ et $u(x)$ est définie par la formule

$$Az \equiv \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds = u(x), \qquad (2;\ 5{,}2)$$

où a et b sont les extrémités du spectre, $K(x, s)$ la fonction de transmission supposée connue. $K(x, s)$ représente le spectre expérimental

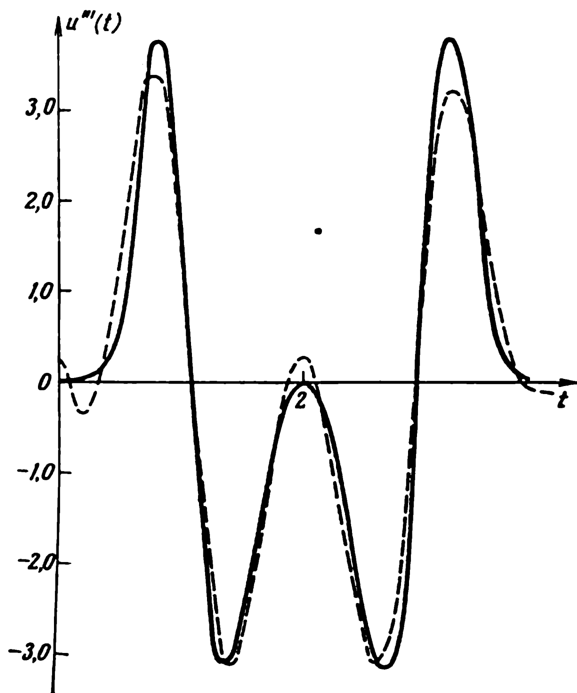


Fig. 3

(en x) si l'instrument de mesure reçoit un rayonnement monochromatique de fréquence (d'énergie) s et d'intensité unité. La fonction $K(x, s)$ peut aussi être considérée comme la réponse de l'instrument de mesure à la fonction δ, $z = \delta(x - s)$.

Le problème consiste à reconstituer le spectre vrai $z(s)$ du rayonnement à partir du spectre expérimental $u(x)$ et revient donc à résoudre l'équation (2; 5,2) par rapport à $z(s)$.

Considérons un modèle mathématique, pour lequel nous prendrons la fonction $\bar{z}(s)$ et la fonction de réponse $K(x, s)$ voisines res-

pectivement de la fonction $z_{ex}(s)$ et de la fonction de réponse que l'on rencontre dans des problèmes pratiques correspondants.

En résolvant le problème direct, nous calculons le spectre « expérimental » $\bar{u}(x) = \int_a^b K(x, s)\,\bar{z}(s)\,ds$ sur un réseau pour x: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Pour simuler le processus d'apparition d'erreurs accidentelles pendant la mesure du spectre expérimental $u(x)$, changeons $\bar{u}(x_i)$ en $\tilde{u}(x_i)$ d'après les formules

$$\tilde{u}(x_i) = \bar{u}(x_i)\left(1 + \theta_i \sqrt{\frac{3(b-a)}{b^3-a^3}}\,\sigma\right),$$

où θ_i sont des nombres aléatoires contenus dans l'intervalle $(-1, 1)$ et obéissant à la loi de distribution uniforme. Il est évident que la valeur moyenne de $\tilde{u}(x_i)$ est égale à $\bar{u}(x_i)$ et que sa variance est égale à σ. La grandeur de l'écart quadratique

$$\|\tilde{u}(x) - \bar{u}(x)\| = \left\{\int_a^b [\tilde{u}(x) - \bar{u}(x)]^2\,dx\right\}^{1/2} \approx \left[3\sigma^2 \frac{1}{n}\sum_i \theta_i^2\right]^{1/2} = \sigma$$

caractérise la précision des données initiales.

Prenons en qualité de $\bar{z}(s)$ la fonction représentée sur la figure 4 en trait plein, et $K(x, s) = \left(1 - \frac{s}{x}\right)\eta(x - s)$, où $\eta(x - s)$ est la fonction unité. Soit $a = 0$, $b = 11$. On calcule

$$\bar{u}(x) = \int_0^{11} K(x, s)\,\bar{z}(s)\,ds.$$

Puis on résout l'équation

$$\int_0^{11} K(x, s)\,z(s)\,ds = \tilde{u}(x)$$

par rapport à $z(s)$.

Substituons à cette dernière équation un système d'équations algébriques linéaires

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij} z_j \Delta s_j = \tilde{u}(x_i)$$

en approchant l'intégrale par une somme d'après la formule de Simpson. On obtient les résultats représentés sur la figure 4 (ligne brisée en pointillé). La ligne en dents de scie n'a rien de commun avec l'allure réelle de $\bar{z}(s)$. Sur cette même figure, on a marqué par

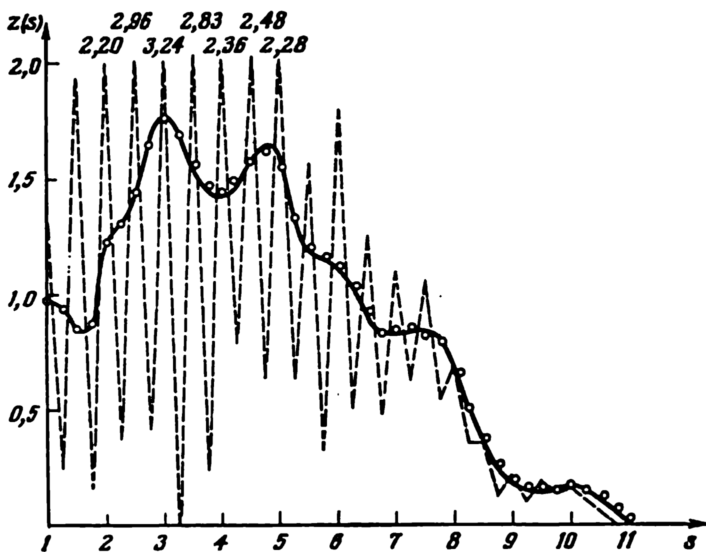

z(s)
2,96
2,83
2,48
2,20
3,24
2,36
2,28
2,0
1,5
1,0
0,5
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
s

Fig. 4

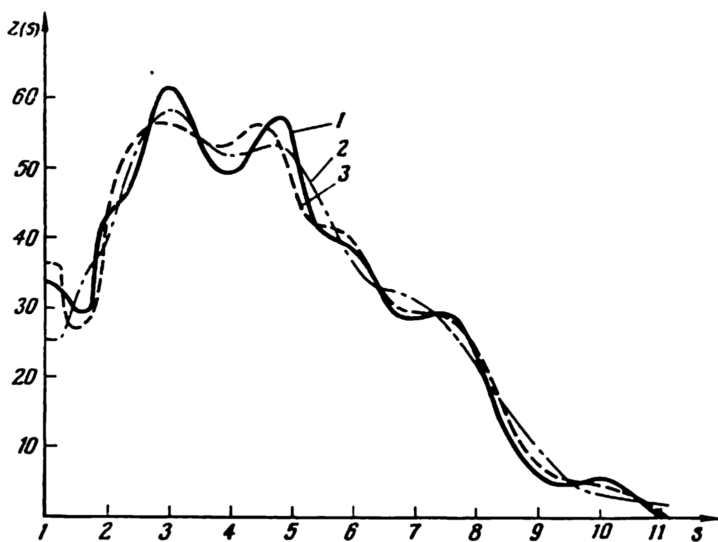

z(s)
60
50
40
30
20
10
1
2
3
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
s

Fig. 5

de petits ronds les valeurs z_j obtenues avec la méthode de régularisation. Les calculs ont été effectués avec la précision de la machine. La figure 5 illustre l'emploi de la méthode de régularisation pour la résolution de l'équation à second membre $\tilde{u}(x_i)$, avec les erreurs relatives dans les nœuds x_i de 5 et de 10 % de la valeur mesurée de $\bar{u}(x_i)$ (courbes *2* et *3*. La courbe *1* représente $\bar{z}(x)$).

L'exemple considéré représente le modèle du problème de reconstitution du spectre réel d'un flux de neutrons rapides émis par une source Po-Be. Ce spectre est semblable à la courbe de $\bar{z}(s)$. Un détecteur à scintillation [162] a servi d'instrument enregistreur.

En se donnant des niveaux différents de l'erreur sur le second membre $u(x)$, on peut, en résolvant le problème considéré, estimer les erreurs correspondantes entachant la fonction $z(s)$ en question. Nous pouvons donc prévoir l'issue de l'expérience qui consiste à déterminer $z(s)$ et, par là même, planifier l'expérience.

C'est un des problèmes typiques de la préparation mathématique d'une expérience.

Exemple 3. Soit à reconstituer la forme d'une impulsion électrique $z_{ex}(t)$ variant en fonction du temps, appliquée à l'entrée d'un câble coaxial de longueur l, d'après l'impulsion de sortie $u(t)$. La relation entre $z_{ex}(t)$ et $u(t)$ est définie par

$$\int_0^t K(t-\tau)\, z_{ex}(\tau)\, d\tau = u(t),$$

où $K(t)$ est la fonction impulsionnelle connue

$$K(t) = \eta(t)\, \frac{\mu l}{\sqrt{4\pi t^3}} \exp\left(-\frac{\mu^2 l^2}{4t}\right), \qquad (2\,;\,5{,}3)$$

μ étant une constante caractéristique du type du câble, et $\eta(t)$ la fonction unité.

Prenons en qualité de $z_{ex}(t)$ la fonction représentée sur la figure 6 en trait continu et faisons sa convolution avec le noyau (2; 5,3) dans lequel $\mu = 3{,}05 \cdot 10^{-4}$, $l = 10^4$. Nous obtenons la fonction $u(t)$ représentée sur la figure 7. Aux nœuds du réseau $\{t_i\}$, faisons subir aux valeurs de $u(t_i) = \int_0^{t_i} K(t_i - \tau)\, z_{ex}(\tau)\, d\tau$ des perturbations définies par les formules $\tilde{u}(t_i) = u(t_i)(1 + \theta_i \varepsilon)$, où θ_i sont des nombres aléatoires, $-1 \leqslant \theta_i \leqslant 1$. Si l'on pose $\varepsilon = 0{,}01 \cdot p$, l'erreur relative sur les valeurs $\tilde{u}(t_i)$ en comparaison avec $u(t_i)$ ne dépassera pas p %. On a pris en l'occurrence $p = 5$.

On demande de trouver, d'après les valeurs données $\tilde{u}(t_i)$, la solution (voisine de $z_{ex}(t)$) de l'équation

$$\int_0^t K(t-\tau)\,z(\tau)\,d\tau = \tilde{u}(t).$$

Ce problème a été résolu par la méthode de régularisation sur un réseau à pas $h = 0{,}4$, $0 \leqslant \tau \leqslant 23$. Comme fonctionnelle stabilisante $\Omega[z]$, on a pris $\Omega[z] = \int_0^{23} \{(z')^2 + z^2\}\,dt$. On a imposé les conditions aux limites de la forme $z(0) = z(23) = 0$. On a eu pour $\alpha = 0{,}00156$ le résultat représenté sur la figure 6 en pointillé. Le paramètre α a été déterminé d'après le résidu.

Considérons les problèmes rétrogrades de la chaleur. On connaît plusieurs types de problèmes de cette espèce; nous allons nous borner à deux. On connaît bien le problème rétrograde de la chaleur qui consiste à résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur à sens du temps inversé. Soit à trouver par exemple la solution de l'équation

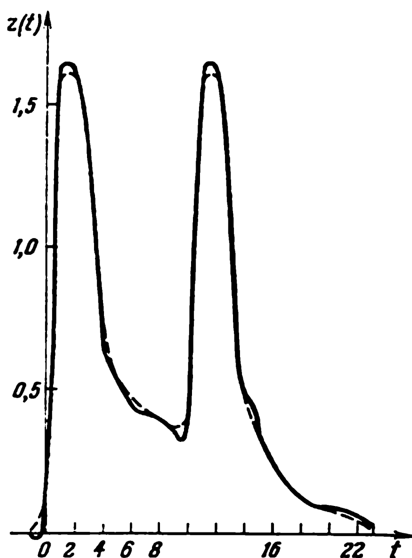


Fig. 6

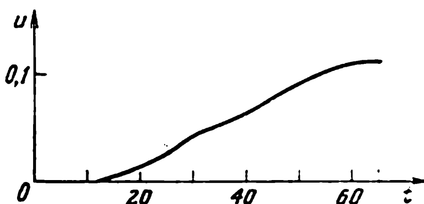


Fig. 7

$$a^2 u_{xx} = u_t$$

pour $t < T$ d'après sa valeur connue pour $t = T$, $f(x) = u(x, T)$. Ce problème est instable vis-à-vis de faibles variations de la fonction $f(x)$. Parmi les méthodes stables de sa résolution, citons, à côté de la méthode de régularisation décrite ci-dessus, la méthode de quasi-réversibilité [104]. L'exemple de problèmes rétrogrades de la chaleur d'un autre type est fourni par le problème rétrograde qui suit, d'une

grande importance pratique, se ramenant à l'équation intégrale étudiée dans l'exemple 3.

Soit un demi-espace homogène $x > 0$ borné par le plan $x = 0$. Supposons que la température initiale dans ce demi-espace soit nulle et que la température à la frontière soit exclusivement fonction du temps $v(t)$. Dans ce cas le problème direct de la chaleur consiste dans la recherche de la solution de l'équation $a^2 u_{xx} = u_t$ dans le domaine $(x > 0,\ t > 0)$ vérifiant les conditions $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = v(t)$. Sa solution se présente comme suit:

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{x v(\tau)}{\sqrt{4\pi a^2 (t-\tau)^3}} \exp\left[\frac{-x^2}{4a^2 (t-\tau)}\right] d\tau.$$

Le problème rétrograde de la chaleur consiste à trouver la température $v(t)$ à la frontière $x = 0$ d'après les résultats de mesure de la température $u(x_0, t)$ à une distance $x_0 > 0$ de la frontière. Ce problème se réduit à la résolution de l'équation intégrale

$$\int_0^t \frac{x_0 v(\tau)}{\sqrt{4\pi a^2 (t-\tau)^3}} \exp\left[\frac{-x_0}{4a^2 (t-\tau)}\right] d\tau = u(x_0, t)$$

par rapport à $v(\tau)$, donc à la résolution de l'équation considérée dans l'exemple 3.

Le problème de la chaleur pour le sens du temps inversé a été étudié dans [104, 203]. On trouve des problèmes semblables aussi dans [20, 34, 39, 55, 65].

§ 6. Détermination du paramètre de régularisation

1. La question de détermination du paramètre de régularisation ne sera traitée ici que pour des opérateurs régularisants $R_1(u, \alpha)$ obtenus par la méthode variationnelle (voir §§ 1-3).

Au fait, lorsqu'il s'agit d'un problème concret, il est généralement assez difficile de trouver le paramètre de régularisation α comme une fonction de l'erreur δ entachant les données initiales $\alpha = \alpha(\delta)$, pour laquelle l'opérateur $R_1(u, \alpha(\delta))$ soit régularisant. Dans bien des cas nous connaissons le nombre δ caractérisant l'imprécision de l'information initiale. Il s'agit donc de trouver une valeur correspondante du paramètre de régularisation α, choisie parmi les valeurs admissibles, c'est-à-dire les valeurs qui sont celles de l'une des fonctions

$$\alpha = \alpha(\delta)$$

pour laquelle l'opérateur $R_1(u, \alpha(\delta))$ est régularisant. Le choix de la valeur admissible du paramètre de régularisation dépend es-

sentiellement de l'information dont on dispose sur les données initiales approchées. On trouve dans la littérature les différentes méthodes de recherche d'une telle valeur de α. Citons-en quelques-unes.

P r e m i è r e m é t h o d e. Supposons que le second membre u_δ de l'équation (2; 0,1) nous soit connu avec une erreur δ, c'est-à-dire que $\rho_U(u_\delta, u_{ex}) \leqslant \delta$.

Alors, moyennant quelques restrictions, on peut déterminer le paramètre de régularisation α d'après le résidu, c'est-à-dire de la condition

$$\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta. \qquad (2;\ 6,1)$$

Désignons par $m(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ les valeurs de $M^\alpha[z_\alpha, u]$, $\rho_U^2(Az_\alpha, u)$, $\Omega[z_\alpha]$. Notons que si l'ensemble des éléments $F^\alpha \equiv \{z_\alpha\}$ sur lesquels est réalisé inf $M^\alpha[z, u]$ se compose de plus d'un élément, les fonctions $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$ seront multiformes. Considérons quelques propriétés des fonctions $m(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$.

Lemme 1. *Les fonctions* $m(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ *sont monotones*: $m(\alpha)$ *et* $\varphi(\alpha)$ *sont non décroissantes, et* $\psi(\alpha)$, *non croissante.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient $\alpha_1 < \alpha_2$ et

$$\varphi_i = \rho_U^2(Az_{\alpha_i}, u),\quad \psi_i = \Omega[z_{\alpha_i}],\quad m_i = M^{\alpha_i}[z_{\alpha_i}, u]\ (i = 1,\ 2),$$

les z_{α_i} étant des éléments quelconques des ensembles F^{α_i}. On a les inégalités

$$m_2 = \varphi_2 + \alpha_2\psi_2 \geqslant \varphi_2 + \alpha_1\psi_2 \geqslant \varphi_1 + \alpha_1\psi_1 = m_1 \qquad (2;\ 6,2)$$

qui montrent que la fonction $m(\alpha)$ est monotone.

Ensuite

$$\varphi_1 + \alpha_1\psi_1 \leqslant \varphi_2 + \alpha_1\psi_2 \quad \text{et} \quad \varphi_2 + \alpha_2\psi_2 \leqslant \varphi_1 + \alpha_2\psi_1.$$

On en déduit

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\,\psi_1 \leqslant (\alpha_1 - \alpha_2)\,\psi_2.$$

Comme $\alpha_1 < \alpha_2$, on a $\psi_1 \geqslant \psi_2$. Cela donne, avec la deuxième inégalité de (2; 6,2), que $\varphi_2 \geqslant \varphi_1$.

Le lemme est démontré.

R e m a r q u e. Si l'ensemble $F^\alpha \equiv \{z_\alpha\}$ se compose de plus d'un élément, alors, bien que la fonction $m(\alpha)$ soit univoque par définition, les fonctions $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$ peuvent être multivoques, car sur les éléments différents z_α de F^α les termes $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$ dans $m(\alpha) = \varphi(\alpha) + \alpha\psi(\alpha)$ peuvent prendre des valeurs différentes. En ce qui concerne la propriété de monotonie de ces fonctions prouvée dans le lemme, celles-ci la possèdent quelle que soit la valeur qu'elles prennent.

Montrons que les fonctions $m(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$ sont semi-continues à gauche et à droite. A cet effet, démontrons d'abord le lemme suivant.

Soit une suite de nombres positifs $\{\alpha_n\}$ convergente vers $\alpha_0 > 0$ et soit $\{z_{\alpha_n}\}$ une suite des éléments z_{α_n} correspondants des ensembles F^{α_n}.

Lemme 2. *Si la suite* $\{z_{\alpha_n}\}$ *est convergente, alors*

$$\lim_{n\to\infty} z_{\alpha_n} = \bar{z} \in F^{\alpha_0}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Il est évident que

$$\lim_{n\to\infty} M^{\alpha_n}[z_{\alpha_n}, u] = M^{\alpha_0}[\bar{z}, u],$$

car les termes de la fonctionnelle $M^\alpha[z, u]$ sont continus par rapport à z et α. Supposons que l'élément $\bar{z}$ n'appartienne pas à l'ensemble F^{α_0}, c'est-à-dire qu'il ne réalise pas le minimum de la fonctionnelle $M^{\alpha_0}[z, u]$. Il existe alors un élément $z^1_{\alpha_0} \in F^{\alpha_0}$ tel que

$$M^{\alpha_0}[z^1_{\alpha_0}, u] = M^{\alpha_0}[\bar{z}, u] - \beta, \quad \text{où} \quad \beta > 0.$$

Cette hypothèse mène à une contradiction, car on a dans ce cas

$$\lim_{n\to\infty} M^{\alpha_n}[z_{\alpha_0}, u] = M^{\alpha_0}[z_{\alpha_0}, u] = M^{\alpha_0}[\bar{z}, u] - \beta$$

et, par là même, on a, à partir d'un certain $n(\beta)$, pour tout $n \geqslant n(\beta)$

$$M^{\alpha_n}[z_{\alpha_0}, u] < M^{\alpha_0}[\bar{z}, u] - \frac{\beta}{2}.$$

D'autre part,

$$M^{\alpha_n}[z_{\alpha_n}, u] > M^{\alpha_0}[\bar{z}, u] - \frac{\beta}{2}.$$

Donc,

$$M^{\alpha_n}[z_{\alpha_n}, u] > M^{\alpha_n}[z_{\alpha_0}, u],$$

ce qui contredit la définition de l'élément z_{α_n}. Le lemme est démontré.

Lemme 3. *Les fonctions* $m(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$ *et* $\psi(\alpha)$ *sont semi-continues à gauche et à droite pour tout* $\alpha > 0$.

Comme les démonstrations de ces propositions sont analogues, nous allons montrer seulement que la fonction $\varphi(\alpha)$ est semi-continue à gauche.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\{\alpha_n\}$ une suite de nombres positifs croissante et convergente vers $\alpha_0 > 0$. A cette suite correspond une suite d'ensembles $\{F^{\alpha_n}\}$ des éléments z_{α_n} minimisant la fonctionnelle $M^{\alpha_n}[z, u]$. Considérons une suite quelconque d'éléments $\{z_{\alpha_n}\}$,

$z_{\alpha_n} \in F^{\alpha_n}$. Cette suite appartient (à partir d'un certain n) à un ensemble compact, $z_{\alpha_n} \in \{z;\ \Omega[z] \leqslant \Omega[z_{\alpha_0-\varepsilon}],\ \varepsilon > 0\}$. On peut donc en extraire une sous-suite convergente. Sans modifier nos notations, nous admettrons que $\{z_{\alpha_n}\}$ est justement cette sous-suite. Soit $\lim\limits_{n\to\infty} z_{\alpha_n} = \bar{z}$. Selon le lemme 2, $\bar{z} \in F^{\alpha_0}$. Alors

$$\rho_U(Az_{\alpha_n}, u)$$

converge vers

$$\rho_U(Az_{\alpha_0}, u).$$

Conformément au lemme 1, la suite $\{\varphi(\alpha_n)\}$ est non décroissante. Elle converge vers un certain nombre $\bar{\varphi}$ qui représente la borne inférieure de l'ensemble des valeurs $\{\varphi(\alpha_0)\}$. S'il en était autrement, il y aurait alors une valeur $\tilde{\varphi}(\alpha_0)$ inférieure à $\bar{\varphi}$. Alors, pour des n suffisamment grands, on trouvera dans F^{α_n} des éléments z_{α_n} tels que $\varphi(\alpha_n)$ sera aussi inférieure à $\bar{\varphi}$, ce qui est incompatible avec le caractère monotone de la fonction $\varphi(\alpha)$. Il s'ensuit que pour toute sous-suite de la suite initiale $\{z_{\alpha_n}\}$ la sous-suite correspondante $\{\varphi(\alpha_n)\}$ converge vers $\bar{\varphi}$. Cela signifie que la suite $\{\varphi(\alpha_n)\}$ tout entière converge aussi vers $\bar{\varphi}$. La fonction est donc semi-continue à gauche.

Etant donné que

$$m(\alpha) = M^\alpha[z_\alpha, u]$$

est par définition une fonction univoque de la variable α, nous en tirons immédiatement le

Corollaire. *La fonction $m(\alpha)$ est une fonction non décroissante et continue de α.*

Notons que si l'ensemble AF est partout dense sur U, alors $m(\alpha) \to 0$ pour $\alpha \to 0$ (et $m(0) = 0$). Cela découle de ce que pour tout $\varepsilon > 0$ on trouve un élément z^1 et un $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ tels que

$$M^\alpha[z^1, u] = \rho_U^2(Az^1, u) + \alpha\Omega[z^1] < \varepsilon \qquad (2;\ 6,3)$$

pour $\alpha = \alpha(\varepsilon)$. Pour cela, on choisit z^1 en sorte que

$$\rho_U^2(Az^1, u) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \alpha(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2\Omega[z^1]}.$$

Cela est possible, car AF est partout dense sur U.

Notons aussi que $\varphi(0) = 0$. Cela résulte de ce que

$$\varphi(\alpha) + \alpha\psi(\alpha) = m(\alpha) \to 0 \quad \text{quand} \quad \alpha \to 0.$$

Les lemmes précédents donnent immédiatement lieu au

Théorème. *Si* $\varphi(\alpha)$ *est une fonction univoque, alors pour tout nombre positif*

$$\delta < \rho_U(Az_0, u), \quad \text{où} \quad z_0 \in \{z ; \Omega[z] = \inf_{Y \in F_1} \Omega[Y]\},$$

il existe un $\alpha(\delta)$ *tel que*

$$\rho_U(Az_{\alpha(\delta)}, u) = \delta.$$

Remarque. La fonction $\varphi(\alpha)$ est univoque, par exemple, lorsque l'élément z_α est unique (voir page 56).

Dans la pratique des calculs, la détermination de α d'après le résidu peut se faire de la façon suivante.

Soit δ l'erreur du second membre u_δ de l'équation (2; 0,1). On prend une partie finie d'une suite monotone de nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Ce peut être par exemple un morceau de la progression géométrique $\alpha_k = \alpha_0 q^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $q > 0$. Pour chaque valeur de α_k on trouve l'élément (la fonction) z_{α_k} minimisant la fonctionnelle

$$M^{\alpha_k}[z, u_\delta]$$

et l'on calcule le résidu $\rho_U(Az_{\alpha_k}, u_\delta)$. En qualité de valeur cherchée de α, on prend un α_{k_0} tel qu'il vérifie, avec la précision requise, l'égalité

$$\rho_U(Az_{\alpha_{k_0}}, u_\delta) = \delta.$$

On peut aussi chercher la solution approchée de l'équation $\varphi(\alpha) = \rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$ par rapport à α par la méthode des tangentes de Newton. Pour cela, il suffit de remarquer que la fonction $\varphi_1(\gamma) = \varphi(1/\gamma)$ est décroissante et convexe vers le bas [115, 120]. Aussi la méthode signalée converge-t-elle pour toute approximation initiale $\gamma_0 = \frac{1}{\alpha_0} > 0$. La dérivée de la fonction $\varphi_1(\gamma)$, nécessaire pour l'utilisation de cette méthode, sera exprimée à l'aide de la dérivée $y_\alpha = \frac{dz_\alpha}{d\alpha}$ de la solution régularisée z_α par rapport à la variable α. L'élément z_α est solution de l'équation d'Euler pour la fonctionnelle $M^\alpha[z, u_\delta]$:

$$(A^*A + \alpha B)z = A^*u_\delta, \tag{2; 6,4}$$

où $B = \Omega'[z]$.

Par différentiation de l'identité $(A^*A + \alpha B)z_\alpha \equiv A^*u_\delta$ (suivant la variable α), on trouve que $y_\alpha = \frac{dz_\alpha}{d\alpha}$ est solution de l'équation

$$(A^*A + \alpha B)y = -\alpha B z_\alpha, \tag{2; 6,5}$$

laquelle ne diffère de l'équation d'Euler (2; 6,4) que par son second membre.

Dans [120] on cite un autre problème réductible au problème de minimisation de la fonctionnelle $M^\alpha[z, u_\delta]$: on demande de trouver parmi les éléments de l'ensemble F_1 qui vérifient la condition $\Omega[z] \leqslant R^2$ un élément sur lequel se réalise $\inf \rho_U^2(Az, u_\delta)$. Aussi, connaissant R, peut-on chercher le paramètre de régularisation à partir de la condition $\Omega[z_\alpha] = R^2$. C'est la deuxième méthode de détermination de α.

Par un raisonnement analogue à la démonstration de la résolubilité de l'équation $\rho_U(Az_\alpha, u) = \delta$, on peut montrer que l'équation $\Omega[z_\alpha] = R^2$ est résoluble. Dans les calculs pratiques, on trouve cette valeur de α de façon approchée, soit par le choix parmi les valeurs données $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, soit par la méthode des tangentes de Newton. Dans [115, 116] il est montré que cette dernière méthode converge pour toute approximation initiale $\alpha_0 > 0$.

Remarquons que la dérivée $y_\alpha = dz_\alpha/d\alpha$ qui apparaît dans ce cas est solution de l'équation (2; 6,5).

Troisième méthode. Recherche de la valeur *quasi optimale* du paramètre de régularisation $\alpha = \alpha_{\text{q.o.}}$.

Supposons que l'espace F est normé. On a par définition [67]

$$\alpha_{\text{q.o.}} = \inf_{\alpha} \sup_{\rho_U(u_\delta,\, u_{\text{ex}}) \leqslant \delta} \left\| \alpha \frac{dz_\alpha}{d\alpha} \right\|_F,$$

le suprémum étant pris sur tous les seconds membres u_δ de l'équation (2; 0,1) qui vérifient l'inégalité $\rho_U(u_\delta, u_{\text{ex}}) \leqslant \delta$. La recherche approchée de $\alpha_{\text{q.o.}}$ exige qu'on trouve des solutions régularisées z_α convenant à un grand nombre de seconds membres possibles u_δ. Or, bien souvent, on n'a en réalité qu'un seul second membre u_δ. On ne peut trouver alors que

$$\inf_{\alpha} \left\| \alpha \frac{dz_\alpha}{d\alpha} \right\|_F.$$

On a montré dans [67, 160, 165] sur des exemples modèles l'efficacité de cette méthode de détermination du paramètre α pour certaines classes de problèmes. Signalons que la fonction $y_\alpha = \alpha \frac{dz_\alpha}{d\alpha}$ est solution de l'équation

$$(A^*A + \alpha B)\, y = A^*Az_\alpha - A^*u_\delta,$$

qui ne diffère que par son second membre de l'équation d'Euler pour la fonctionnelle $M^\alpha[z, u_\delta]$.

Quatrième méthode. Elle consiste à choisir en qualité de valeur convenable du paramètre de régularisation une valeur de $\alpha = \alpha_0$ telle que la relation

$$v(\alpha) = \frac{\rho_U\left(A\left(\alpha \frac{dz_\alpha}{d\alpha}\right),\ Az_\alpha - u_\delta\right)}{\rho_U(Az_\alpha, u_\delta)}$$

ait la valeur *maximale*. On a montré dans [67] l'efficacité de cette méthode de choix de α par calcul expérimental sur quelques problèmes modèles.

Les méthodes de détermination du paramètre α varient suivant l'information supplémentaire dont on dispose sur le second membre. Par exemple, on donne au § 2 du ch. IV une méthode de recherche de la valeur (C, f)-optimale du paramètre de régularisation, dans lequel une information auxiliaire est exploitée. L'efficacité des différentes méthodes de détermination du paramètre α pour telle ou telle classe de problèmes est établie en effectuant un calcul expérimental. On étudie des problèmes analogues dans [28, 49, 50].

CHAPITRE III

SUR LA RÉSOLUTION DES SYSTÈMES DÉGÉNÉRÉS ET MAL CONDITIONNÉS D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES LINÉAIRES

1. On connaît les difficultés que présente la résolution de systèmes dits mal conditionnés *) d'équations algébriques linéaires : de petites variations des seconds membres de tels systèmes peuvent entraîner des variations importantes (sortant des limites admissibles) de la solution.

Nous allons considérer des systèmes d'équations

$$Az = u \qquad (3;\ 0{,}1)$$

dans lesquels A est une matrice à éléments a_{ij}, $A = \{a_{ij}\}$, z est un vecteur inconnu de coordonnées z_j, $z = \{z_j\}$, u est un vecteur connu de coordonnées u_i, $u = \{u_i\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

On dit que le système (3; 0,1) est dégénéré si son déterminant est égal à zéro, det $A = 0$. Dans ce cas la matrice A a des valeurs propres nulles.

Lorsque les calculs sont effectués avec une précision finie, il est parfois impossible de dire si le système d'équations proposé est dégénéré ou mal conditionné. Ainsi donc, pour une précision donnée, les systèmes dégénérés et mal conditionnés peuvent être indiscernables. C'est évidemment le cas où la matrice A a ses valeurs propres suffisamment voisines de zéro.

Dans la pratique, on ne connaît souvent le second membre u et les éléments de la matrice A (donc les coefficients du système (3; 0,1)) que d'une façon approchée. On a alors, au fait, au lieu du système (3; 0,1) un autre système $\widetilde{A}z = \widetilde{u}$, tel que $\|\widetilde{A} - A\| \leqslant \delta$, $\|\widetilde{u} - u\| \leqslant \delta$, la signification des normes étant généralement déterminée par la nature même du problème. Etant conduit à considérer non pas la matrice A mais la matrice $\widetilde{A}$, on est *a fortiori* dans l'incertitude quant au caractère du système (3; 0,1) : on ne peut pas dire s'il est dégénéré ou non.

Dans ces cas, on ne connaît sur le système exact $Az = u$, dont on cherche la solution, que la matrice A et le second membre u

*) Il est à noter que la signification de ce terme n'est pas très bien définie.

vérifient les inégalités $\| \tilde{A} - A \| \leqslant \delta$ et $\| \tilde{u} - u \| \leqslant \delta$. Or, les systèmes dont les données initiales (A, u) satisfont les conditions imposées sont innombrables et, pour un niveau d'erreur donné, indiscernables. Puisqu'on n'a pas le système exact (3; 0,1) mais un système approché $\tilde{A}z = \tilde{u}$, on ne peut chercher qu'une solution approchée. Or, le système approché $\tilde{A}z = \tilde{u}$ peut s'avérer impossible. La question se pose: que doit-on entendre par solution approchée du système (3; 0,1)?

Parmi les « systèmes exacts possibles », il peut y avoir des dégénérés. S'ils sont résolubles, ils admettent une infinité de solutions. Laquelle de ces solutions doit-on chercher à définir approximativement?

Ainsi donc, dans un grand nombre de cas, on est conduit à considérer toute une classe de systèmes d'équations indiscernables entre eux (pour un niveau d'erreur donné), parmi lesquels quelques-uns peuvent être dégénérés, d'autres non résolubles. La construction des solutions approchées des systèmes de cette classe doit s'effectuer par les mêmes méthodes, applicables à toute la diversité des problèmes. Les solutions cherchées doivent être stables vis-à-vis de faibles variations des données initiales.

Ces méthodes sont basées sur le principe de sélection que l'on a étudié dans le chapitre II en parlant de la méthode de régularisation.

2. Supposons donc que le système (3; 0,1) est dégénéré et que le vecteur du second membre u vérifie les conditions de résolubilité du système. Un tel système admet une infinité de solutions. Soit F_A la totalité des solutions du système. Ceci posé, nous procédons à la recherche de la solution normale du système. Reprenant notre terminologie ancienne [166, 167], nous entendons par *solution normale* du système (3; 0,1) par rapport au vecteur z^1 une solution z^0 telle que

$$\| z^0 - z^1 \| = \inf_{z \in F_A} \| z - z^1 \|,$$

où z^1 est un élément (vecteur) fixé défini par la position du problème, $\| z \|$ la norme du vecteur z, $\| z \| = \{\sum_{j=1}^{n} z_j^2\}^{1/2}$. Pour simplifier l'écriture, nous allons poser dans la suite $z^1 = 0$. Il est évident que la solution normale se définit de façon unique.

R e m a r q u e 1. On peut aussi définir la solution normale z^0 du système (3; 0,1) comme la solution minimisant une forme quadratique définie positive donnée par rapport aux coordonnées du vecteur $z - z^1$. Tous les résultats qui seront obtenus ci-après restent vrais dans ce cas.

R e m a r q u e 2. Soit $r < n$ le rang de la matrice A du système dégénéré (3; 0,1) et soient $\bar{z}_{r+1}, \bar{z}_{r+2}, \ldots, \bar{z}_n$ la base d'un espace linéai-

re N_A d'éléments z pour lesquels $Az = 0$, $N_A = \{z;\ Az = 0\}$. La solution $\bar{z}^0$ du système (3; 0,1) vérifiant $n - r$ conditions d'orthogonalité

$$(\bar{z}^0 - z^1,\ \bar{z}_s) = 0, \quad s = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ n \qquad (3;\ 0,2)$$

se définit de façon unique et, comme il est facile de le voir, coïncide avec la solution normale.

R e m a r q u e 3. En algèbre linéaire, on appelle le vecteur z, minimisant le résidu $\| Az - u \|^2$, *pseudo-solution* du système (3; 0,1). D'une façon analogue, on définit la notion de pseudo-solution normale. La méthode proposée de construction de solutions normales approchées du système (3; 0,1) est applicable aussi à la recherche de pseudo-solutions normales approchées (voir [121]).

3. On s'assure sans difficulté que le problème de recherche de la solution normale du système (3; 0,1) n'est pas bien posé. Soit en effet A une matrice symétrique. Si elle n'est pas dégénérée, on peut, en effectuant la transformation orthogonale

$$z = Vz^*, \quad u = Vu^*,$$

la diagonaliser, si bien que le système après transformation se présentera comme suit:

$$\lambda_i z_i^* = u_i^* \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

où λ_i sont les valeurs propres de la matrice A.

Si la matrice symétrique A est dégénérée de rang r, alors ses $n - r$ valeurs propres sont nulles. Soit

$$\lambda_i \neq 0 \quad \text{pour} \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$$

et

$$\lambda_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = r+1, \quad r+2, \quad \ldots, \quad n.$$

Supposons que les « données initiales » du système (A et u) sont connues avec une erreur, c'est-à-dire qu'au lieu de A et u on connaît leurs δ-approximations $\tilde{A}$ et $\tilde{u}$:

$$\| \tilde{A} - A \| \leqslant \delta, \quad \| \tilde{u} - u \| \leqslant \delta,$$

avec

$$\| A \| = \{ \sum_{i,j} a_{ij}^2 \}^{1/2}, \qquad \| u \| = \{ \sum_i u_i^2 \}^{1/2}. \qquad (3;\ 0,3)$$

Soient $\tilde{\lambda}_i$ les valeurs propres de la matrice $\tilde{A}$. On sait qu'elles dépendent continûment de A pour la norme (3; 0,3). Donc, les valeurs propres $\tilde{\lambda}_{r+1}$, $\tilde{\lambda}_{r+2}$, . . ., $\tilde{\lambda}_n$ peuvent être aussi petites que l'on veut, pourvu que δ soit suffisamment petit.

Si elles ne sont pas nulles, alors

$$\tilde{z}_i^* = \frac{1}{\tilde{\lambda}_i} \tilde{u}_i^*.$$

Ainsi donc, pour une précision quelconque δ suffisamment petite, il existe des perturbations du système telles que certains $\tilde{z}_i^*$ prennent n'importe quelles valeurs fixées *a priori*. Cela signifie que le problème de recherche de la solution normale du système (3; 0,1) est instable.

La méthode proposée ci-dessous, qui a été publiée auparavant dans [166, 167], permet la recherche d'une solution normale du système (3; 0,1) stable vis-à-vis de faibles (pour la norme (3; 0,3)) perturbations du second membre u et de la matrice A. Elle est basée sur la méthode de régularisation.

§ 1. Méthode de régularisation appliquée à la recherche de la solution normale

1. Supposons qu'on a au lieu du système dégénéré exact $Az = \bar{u}$ un système à second membre approché

$$Az = \tilde{u} \qquad (3;\ 1,1)$$

dans lequel $\|\tilde{u} - \bar{u}\| \leqslant \delta$ et le vecteur $\tilde{u}$ peut ne pas vérifier la condition de résolubilité.

Il est naturel de chercher la solution normale approchée du système (3; 1,1) parmi les vecteurs z pour lesquels est vérifiée la condition $\|Az - \tilde{u}\| \leqslant \delta$. Cette solution (conformément à la définition de la solution normale) minimise la fonctionnelle $\Omega[z] = \|z - z^1\|^2$.

Il s'agit donc de minimiser la fonctionnelle $\|z - z^1\|^2$ sur l'ensemble des vecteurs vérifiant l'inégalité $\|Az - \tilde{u}\| \leqslant \delta$. Comme la fonctionnelle $\Omega[z] = \|z - z^1\|^2$ est, de toute évidence, stabilisante et quasi monotone (voir § 2, ch. II), ce dernier problème revient à minimiser cette fonctionnelle sur l'ensemble des vecteurs z vérifiant la condition $\|Az - \tilde{u}\| = \delta$. Pour cela il faut trouver le vecteur z^α susceptible de minimiser la fonctionnelle lissante

$$M^\alpha[z, \tilde{u}, A] = \|Az - \tilde{u}\|^2 + \alpha \|z - z^1\|^2, \qquad \alpha > 0.$$

La valeur du paramètre α se détermine de la condition $\|Az^\alpha - \tilde{u}\| = \delta$, c'est-à-dire d'après le résidu.

Un tel vecteur est évidemment unique. Il peut être tiré du système d'équations linéaires

$$\alpha z_k^\alpha + \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{k,j} z_j^\alpha = \tilde{b}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

dans lequel

$$\bar{a}_{k,j}=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}a_{ij},\ \tilde{b}_k=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\tilde{u}_i,$$

ou bien à l'aide d'un autre algorithme quelconque de minimisation de la fonctionnelle (forme)

$$M^{\alpha}[z,\ \tilde{u},\ A].$$

Le vecteur z^{α} peut être considéré comme le résultat d'application à $\tilde{u}$ d'un certain opérateur $z^{\alpha} = R(\tilde{u}, \alpha)$, fonction du paramètre α. Comme dans le cas considéré les conditions d'applicabilité de la méthode de régularisation sont remplies, alors, en vertu du § 2, ch. II, l'opérateur $R(\tilde{u}, \alpha)$ est régularisant, et le vecteur $z^{\alpha} = R(\tilde{u}, \alpha)$ peut être adopté comme solution normale approchée du système (3; 1,1).

En prévision de nouvelles extensions du domaine d'emploi de la méthode de régularisation, il est bon de rappeler ici la démonstration des théorèmes asymptotiques sur le comportement de $z^{\alpha(\delta)}$ pour $\delta \to 0$.

Désignons par U_A le sous-espace linéaire des images des vecteurs z ($z \in R^n$):

$$U_A \equiv \{u;\ u = Az,\ z \in R^n\}.$$

Soit $\tilde{v}_A$ la projection du vecteur $\tilde{u}$ sur U_A. Il est évident que

$$\|\tilde{u}-\tilde{v}_A\| \leqslant \|\tilde{u}-Az\|$$

Théorème 1. *Les vecteurs z^{α} réalisant le minimum de la fonctionnelle $M^{\alpha}[z, \tilde{u}, A]$ convergent pour $\alpha \to 0$ vers la solution normale $\hat{z}_0$ du système $Az = \tilde{v}_A$.*

Démonstration. Soit $\hat{F}_A$ l'ensemble des solutions du système $Az = \tilde{v}_A$. On sait que le vecteur $v = \tilde{u} - \tilde{v}_A$ est orthogonal par rapport au sous-espace U_A; par conséquent,

$$\|Az-\tilde{u}\|^2 = \|Az-\tilde{v}_A\|^2 + \|\tilde{u}-\tilde{v}_A\|^2$$

et

$$M^{\alpha}[z,\ \tilde{u},\ A] = \|Az-\tilde{v}_A\|^2 + \|\tilde{u}-\tilde{v}_A\|^2 + \alpha\Omega[z] = \\ = M^{\alpha}[z,\ \tilde{v}_A,\ A] + \|\tilde{u}-v_A\|^2. \quad (3;\ 1,2)$$

Puisque $\tilde{v}_A \in U_A$, le système

$$Az = \tilde{v}_A \qquad (3;\ 1,3)$$

est résoluble. Le vecteur z^{α} minimisant la fonctionnelle $M^{\alpha}[z, \tilde{u}, A]$ minimise aussi la fonctionnelle $M^{\alpha}[z, \tilde{v}_A, A]$, car en vertu de (3; 1,2)

ces fonctionnelles diffèrent de la valeur $\| \tilde{u} - \tilde{v}_A \|^2$ indépendante de z.

Comme $A\hat{z}^0 = \tilde{v}_A$, on a

$$\alpha\Omega[z^\alpha] \leqslant M^\alpha[z^\alpha, \tilde{v}_A, A] \leqslant M^\alpha[\hat{z}^0, \tilde{v}_A, A] = \alpha\Omega[\hat{z}^0]$$

ou

$$\Omega[z^\alpha] \leqslant \Omega[\hat{z}^0] = d, \qquad (3;1,4)$$

R^n étant un espace euclidien de dimension n et $z \in R^n$, l'ensemble des éléments z pour lesquels

$$\Omega[z] = \| z \|^2 \leqslant d$$

est compact pour tout $d > 0$.

Ainsi donc, z^α appartient à un ensemble compact. De cet ensemble on peut tirer une suite $\{z^{\alpha_k}\}$ convergente pour $\alpha_k \to 0$ vers un certain élément z_1^0. Le vecteur z_1^0 minimise la fonctionnelle $\| Az - \tilde{v}_A \|^2$, dont le minimum est égal à zéro. Donc,

$$Az_1^0 = \tilde{v}_A,$$

c'est-à-dire que le vecteur z_1^0 est solution de l'équation (3; 1,3). Il résulte de (3; 1,4) que

$$\Omega[z_1^0] \leqslant \Omega[\hat{z}^0],$$

ou

$$\| z_1^0 \| \leqslant \| \hat{z}^0 \|. \qquad (3;1,5)$$

Etant donné que la solution normale $\hat{z}^0$ de l'équation (3; 1,3) possède la propriété d'avoir la norme $\| \hat{z}^0 \|$ minimale, il suit de (3; 1,5) que $z_1^0 = \hat{z}^0$. Le théorème est démontré.

2. Considérons maintenant le cas où le second membre et la matrice A sont tous les deux connus approximativement, c'est-à-dire que dans l'équation

$$\tilde{A}z = \tilde{u}, \qquad (3;1,6)$$

on a

$$\| \tilde{u} - u \| \leqslant \delta, \quad \| \tilde{A} - A \| \leqslant \delta$$

Nous avons montré au § 2, ch. II, page 55, qu'on peut appliquer à la construction des solutions approchées régularisées de tels problèmes la méthode variationnelle, consistant à minimiser la fonctionnelle lissante correspondante $M^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{A}]$. Dans ce cas le paramètre de régularisation est déterminé d'après le résidu généralisé [47]. Nous allons démontrer dans ce qui suit le théorème sur le comportement asymptotique de la solution régularisée $z^{\alpha(\delta)}$ pour

$\delta \to 0$, théorème qui laisse voir que le paramètre de régularisation peut être déterminé par d'autres procédés.

Considérons donc, comme nous l'avons fait dans [166, 167], au lieu de ce problème, le problème du minimum de la fonctionnelle (forme)

$$M^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{A}] = \| \tilde{A}z - \tilde{u} \|^2 + \alpha\Omega[z],$$

où

$$\Omega[z] = \| z \|^2.$$

Il existe un seul élément $\tilde{z}^\alpha$ minimisant la fonctionnelle $M^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{A}]$.

Supposons que le vecteur u vérifie les conditions de résolubilité et que z^0 est la solution normale de l'équation $Az = u$.

Théorème 2. *Soient $\tilde{A}$ et $\tilde{u}$ des δ-approximations de la matrice A et du vecteur u, et $\beta(\delta)$ et $\alpha_0(\delta)$, deux fonctions positives continues quelconques, tendant monotonement vers zéro pour $\delta \to 0$ et telles que*

$$\frac{\delta^2}{\beta(\delta)} \leqslant \alpha_0(\delta).$$

Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta_0(\varepsilon, \| z^0 \|) > 0$ tel que

$$\| \tilde{z}^\alpha - z^0 \| \leqslant \varepsilon$$

si $0 < \delta \leqslant \delta_0$ et α est un nombre quelconque vérifiant les conditions

$$\frac{\delta^2}{\beta(\delta)} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0(\delta). \qquad (3;1,7)$$

Démonstration. Soit $U_{\tilde{A}} \equiv \{u;\ u = \tilde{A}z,\ z \in R^n\}$ et soit $\tilde{v}_{\tilde{A}}$ la projection du vecteur $\tilde{u}$ sur le sous-espace $U_{\tilde{A}}$. Alors le vecteur $\tilde{v} = \tilde{u} - \tilde{v}_{\tilde{A}}$ est orthogonal à $U_{\tilde{A}}$. On sait que

$$\| \tilde{u} - \tilde{v}_{\tilde{A}} \| \leqslant \| \tilde{u} - \tilde{A}z \|$$

et que

$$M^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{A}] = \| \tilde{u} - \tilde{v}_{\tilde{A}} \|^2 + M^\alpha[z, \tilde{v}_{\tilde{A}}, \tilde{A}].$$

Par conséquent, le vecteur $\tilde{z}^\alpha$ qui minimise la fonctionnelle

$$M^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{A}]$$

minimise aussi bien la fonctionnelle

$$M^\alpha[z, \tilde{v}_{\tilde{A}}, \tilde{A}].$$

Il est évident que

$$M^\alpha[\tilde{z}^\alpha, \tilde{v}_{\tilde{A}}, \tilde{A}] \leqslant M^\alpha[z^0, \tilde{v}_{\tilde{A}}, \tilde{A}] = \| \tilde{A}z^0 - \tilde{v}_{\tilde{A}} \|^2 + \alpha\Omega[z^0]$$

Il est facile de voir que

$$\| \tilde{A}z^0 - \tilde{v}_{\tilde{A}} \| \leqslant \| \tilde{A}z^0 - Az^0 \| + \| Az^0 - \tilde{v}_{\tilde{A}} \| \leqslant C\delta, \qquad (3;1,8)$$

où

$$C = 2\,(1 + \| z^0 \|).$$

En effet,

$$\| \tilde{A}z^0 - Az^0 \| \leqslant \| \tilde{A} - A \| \cdot \| z^0 \| \leqslant \delta \| z^0 \|. \qquad (3\,;\ 1{,}9)$$

A l'aide de l'inégalité (3; 1,7) et de la relation $Az^0 = u$, on trouve que

$$\| Az^0 - \tilde{v}_{\tilde{A}} \| = \| u - \tilde{v}_{\tilde{A}} \| \leqslant \| u - \tilde{u} \| + \| \tilde{u} - \tilde{v}_{\tilde{A}} \| \leqslant \| u - \tilde{u} \| +$$
$$+ \| \tilde{u} - \tilde{A}z^0 \| \leqslant \| u - \tilde{u} \| + \| \tilde{u} - u \| + \| u - \tilde{A}z^0 \| = 2 \| \tilde{u} - u \| +$$
$$+ \| Az^0 - \tilde{A}z^0 \| \leqslant 2 \| \tilde{u} - u \| + \| \tilde{A} - A \| \| z^0 \| \leqslant \delta\,(2 + \| z^0 \|).$$

Donc

$$\| Az^0 - \tilde{v}_{\tilde{A}} \| \leqslant \delta\,(2 + \| z^0 \|). \qquad (3\,;\ 1{,}10)$$

De (3; 1,9) et de (3; 1,10) il résulte (3; 1,8). Ensuite,

$$\alpha\Omega\,[\tilde{z}^\alpha] \leqslant M^\alpha\,[\tilde{z}^\alpha,\ \tilde{v}_{\tilde{A}},\ \tilde{A}] \leqslant M^\alpha\,[z^0,\ \tilde{v}_{\tilde{A}},\ \tilde{A}] = \| \tilde{A}z^0 - \tilde{v}_{\tilde{A}} \|^2 +$$
$$+ \alpha\Omega\,[z^0].$$

Utilisant l'inégalité (3; 1,8), on trouve

$$\alpha\Omega\,[\tilde{z}^\alpha] \leqslant M^\alpha\,[\tilde{z}^\alpha,\ \tilde{v}_{\tilde{A}},\ \tilde{A}] \leqslant$$
$$\leqslant C^2\delta^2 + \alpha\Omega\,[z^0] = \alpha \left[\frac{C^2\delta^2}{\alpha} + \| z^0 \|^2 \right], \qquad (3\,;\ 1{,}11)$$

ou

$$\| \tilde{z}^\alpha \|^2 \leqslant \frac{C^2\delta^2}{\alpha} + \| z^0 \|^2. \qquad (3\,;\ 1{,}12)$$

Pour tout α vérifiant les conditions (3; 1,7), on a de (3; 1,12)

$$\| \tilde{z}^\alpha \| \leqslant \| z^0 \| + \varepsilon_1(\delta), \qquad (3\,;\ 1{,}13)$$

où $\varepsilon_1(\delta) \to 0$ pour $\delta \to 0$.

Considérons les suites de nombres δ_n ($\delta_n \to 0$ pour $n \to \infty$), de α_n, de matrices $\tilde{A}_n$ et de seconds membres $\tilde{u}_n$ tels que

$$\| \tilde{A}_n - A \| \leqslant \delta_n, \quad \| \tilde{u}_n - u \| \leqslant \delta_n$$

et

$$\frac{\delta_n^2}{\beta(\delta_n)} \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_0(\delta_n). \qquad (3\,;\ 1{,}14)$$

A ces suites correspond une suite de vecteurs $\tilde{z}^{\alpha_n}$ qui minimisent respectivement les fonctionnelles

$$M^{\alpha_n}\,[z,\ \tilde{u}_n,\ \tilde{A}_n].$$

Les nombres α_n vérifiant les inégalités (3; 1,14), les $\tilde{z}^{\alpha_n}$ vérifient les inégalités (3; 1,13), c'est-à-dire que pour tout n

$$\| \tilde{z}^{\alpha_n} \| \leqslant \| z^0 \| + \varepsilon_1 (\delta_n). \qquad (3;\ 1,15)$$

Cela signifie que la suite des vecteurs $\{\tilde{z}^{\alpha_n}\}$ est bornée (pour la norme) et est donc compacte. On peut en extraire une sous-suite convergente. Sans changer les notations, nous avons

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{z}^{\alpha_n} = z_1^0.$$

Les vecteurs de cette sous-suite vérifient les inégalités

$$\begin{aligned} &\| \widetilde{Az^{\alpha_n}} - Az^0 \| \leqslant \\ &\quad \leqslant \| \widetilde{Az^{\alpha_n}} - \tilde{A}_n \tilde{z}^{\alpha_n} \| + \| \tilde{A}_n \tilde{z}^{\alpha_n} - \tilde{v}_{\tilde{A}} \| + \| \tilde{v}_{\tilde{A}} - Az^0 \| \leqslant \\ &\quad \leqslant \delta_n \| \tilde{z}^{\alpha_n} \| + \sqrt{M^{\alpha_n} [\tilde{z}^{\alpha_n}, \tilde{v}_{\tilde{A}_n}, \tilde{A}_n]} + \delta_n (2 + \| z^0 \|) \leqslant \\ &\quad \leqslant \delta_n \{2 + 2 \| z^0 \| + \varepsilon_1 (\delta_n)\} + \sqrt{C^2 \delta_n^2 + \alpha_0 (\delta_n) \| z^0 \|^2} = b_n. \end{aligned}$$

Nous nous sommes servis ici des inégalités:

(3; 1,10) pour estimer la norme $\| \tilde{v}_{\tilde{A}_n} - Az^0 \|$,
(3; 1,15) pour estimer $\| \tilde{z}^{\alpha_n} \|$
et (3; 1,11) pour estimer $M^{\alpha_n} [\tilde{z}^{\alpha_n}, \tilde{v}_{\tilde{A}_n}, \tilde{A}_n]$.

Il est évident que $b_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Passant à la limite dans l'inégalité

$$\| \widetilde{Az^{\alpha_n}} - Az^0 \| = \| \widetilde{Az^{\alpha_n}} - u \| \leqslant b_n,$$

on obtient

$$Az_1^0 = u$$

Ainsi donc, z_1^0 est solution de l'équation $Az = u$. Elle coïncide avec la solution normale z^0 en vertu de la propriété de minimalité de cette dernière et de l'inégalité

$$\| z_1^0 \| \leqslant \| z^0 \|$$

que l'on déduit par passage à la limite dans l'inégalité (3; 1,15). Le théorème est démontré.

On a eu donc raison de prendre $\tilde{z}^{\alpha}$ en qualité de solution normale approchée du système.

R e m a r q u e 1. Le théorème 2 est vrai pour une large classe d'équations de la forme $\tilde{A}z = \tilde{u}$ à données initiales $(\tilde{A}, \tilde{u})$ perturbées. La démonstration reste pratiquement inchangée.

R e m a r q u e 2. Si la matrice $\tilde{A}$ est mal conditionnée et qu'on trouve dans son δ-voisinage une matrice dégénérée A, on est dans le cadre du théorème 2; il est donc naturel de chercher la solution du système par la méthode de régularisation, ainsi qu'il a été décrit ci-dessus.

Les questions relatives aux méthodes stables de résolution des systèmes d'équations algébriques sont traitées aussi dans [29, 30, 62 à 64, 118, 121].

§ 2. Remarques supplémentaires

R e m a r q u e 1. Les résultats obtenus au § 1 n'utilisant pas (essentiellement) le fait que les espaces F et U des éléments z et u sont de dimension finie, ils restent vrais pour n'importe quels opérateurs linéaires continus Az (la démonstration en est absolument identique) si seulement U est un espace hilbertien et si F est une injection s-compacte dans l'espace normé auquel il appartient [161]. Cela permet d'étendre la méthode de régularisation aux équations de Fredholm de seconde espèce (voir [2, 3]).

R e m a r q u e 2. La méthode proposée convient aussi à la résolution de problèmes mal posés de programmation linéaire (voir ch. VIII) dans lesquels on cherche une solution du système telle qu'elle vérifie certaines contraintes supplémentaires (la solution doit appartenir à un ensemble convexe fermé).

R e m a r q u e 3. On peut aussi prendre le stabilisateur $\Omega[z]$ sous la forme

$$\Omega[z] = \sum_{i=1}^{n} \rho_i (z_i - z_{1i})^2,$$

où $\rho_i > 0$, $z_1 = (z_{1,1}, z_{1,2}, \ldots, z_{1,n})$.

Une telle modification du stabilisateur n'affecte ni la formulation ni la démonstration des théorèmes du § 1.

CHAPITRE IV

SUR LES SOLUTIONS APPROCHÉES DES ÉQUATIONS INTÉGRALES DE PREMIÈRE ESPÈCE DU TYPE DE CONVOLUTION

Parmi les équations intégrales de première espèce, on rencontre souvent des équations du type de convolution $K(t) * z(t) = u(t)$. L'équation

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau) z(\tau) d\tau = u(t) \qquad (4\,;\,0{,}1)$$

en est un exemple.

Il est évident qu'on peut employer la méthode de régularisation à la construction des solutions approchées des équations du type de convolution. Pour cela, il suffit d'indiquer les méthodes de construction des opérateurs régularisants. Dans le chapitre II, nous avons examiné la méthode variationnelle. Dans le chapitre présent, en reprenant les idées de [11, 14, 15], nous allons montrer comment on construit, à l'aide des transformations intégrales pour les équations du type de convolution, une famille (classe) étendue d'opérateurs régularisants facilement réalisables sur ordinateur. Pour une sous-classe de cette classe, nous indiquerons son lien avec les O. R. obtenus par la méthode variationnelle.

Nous décrivons en détail la construction de l'O. R. pour l'équation (4; 0,1) avec emploi de la transformation de Fourier. Pourtant, tous les résultats obtenus, ainsi que les démonstrations, seront analogues pour les équations du type de convolution demandant l'application des transformations de Laplace, de Mellin, etc. Aussi omettra-t-on de répéter les raisonnements et les calculs pour ces équations.

Au § 1 on admet que l'erreur $v(t)$ entachant le second membre $u(t)$ est additive, c'est-à-dire que $u(t) = u_{ex}(t) + v(t)$.

On construit les opérateurs régularisants de la classe mentionnée sous des exigences très faibles imposées au second membre $u(t)$ de l'équation et à l'erreur $v(t)$ (u et $v \in L_2$) et sans tenir compte du caractère aléatoire de la fonction $v(t)$.

A la considération (au § 2) de l'écart de la solution régularisée par rapport à celle exacte, on suppose en outre que l'erreur $v(t)$

(un parasite, un bruit) est une réalisation d'un processus aléatoire stationnaire non corrélé avec la solution cherchée $z_{ex}(t)$. On estime l'écart dans une métrique probabilisée $\sup_t \overline{[z_\alpha(t) - z_{ex}(t)]^2}$, le grand trait supérieur indiquant ici l'espérance mathématique. Ensuite on passe à l'examen des solutions régularisées obtenues à l'aide des stabilisateurs élémentaires d'ordre p.

D'après la forme de la représentation asymptotique de la transformée de Fourier de leur noyau (pour $\omega \to \infty$), on distingue quatre types (classes) d'équations intégrales du type de convolution rencontrées dans la pratique, pour lesquelles, sous certaines hypothèses supplémentaires relatives à la représentation asymptotique (pour $\omega \to \infty$) de la densité spectrale de l'erreur $v(t)$, on construit des estimations asymptotiques, suivant α (pour $\alpha \to 0$), de l'écart de la solution régularisée par rapport à celle exacte [9 à 11, 13], en estimant séparément tant l'écart dû à l'influence de la méthode de régularisation que celui imputable à l'erreur sur le second membre.

§ 1. Classes d'opérateurs régularisants pour les équations du type de convolution

1. Soit une équation du type de convolution

$$z(t) * K(t) = u(t), \tag{4; 1,1}$$

où $K(t)$ et $u(t)$ sont des fonctions connues et $z(t)$ une fonction inconnue; $z \in F$, $u \in U$, F et U sont deux espaces métriques.

Nous admettons que cette équation a pour $u(t) = u_{ex}(t)$ une solution unique $z_{ex}(t)$ appartenant à F, c'est-à-dire que

$$z_{ex}(t) * K(t) \equiv u_{ex}(t).$$

Il s'agit de rechercher la fonction $z_{ex}(t)$. Si le second membre est défini avec une erreur, en sorte qu'au lieu de $u_{ex}(t)$ on a une fonction $u(t)$ telle que

$$\rho_U(u_{ex}, u) \leqslant \delta,$$

on ne peut chercher z_{ex} mais seulement une solution approchée. En qualité de cette dernière, on prendra la solution régularisée

$$z_\alpha(t) = R(u, \alpha),$$

$R(u, \alpha)$ étant un opérateur régularisant.

2. Considérons une classe étendue d'opérateurs régularisants obtenus par des transformations intégrales classiques. Commençons par donner sa description.

Soient F et U deux ensembles de fonctions ($F \subset L_1$, $U \subset L_2$) et A un opérateur linéaire continu à domaine de définition $D_A \supset F$. Considérons l'équation

$$Az = u, \quad u \in U. \qquad (4;\ 1{,}2)$$

On admet qu'elle a une solution unique sur F. Appliquant à la relation (4 ; 1,2) une transformation intégrale linéaire $\mathcal{Y}$ (ce peut être la transformation de Fourier, de Laplace, de Mellin, etc.), on obtient

$$\mathcal{Y}\,[Az] = \mathcal{Y}\,[u] = u\,(\omega). \qquad (4;\ 1{,}3)$$

Soit A un opérateur tel qu'il permet de définir $\mathcal{Y}\,[z] = z\,(\omega)$ à partir de la relation (4 ; 1,3) sous la forme

$$z\,(\omega) = \psi\,(u\,(\omega),\ \omega).$$

Si Az est la convolution $z\,(t) * K\,(t)$ de fonctions $z\,(t)$ avec une fonction (noyau) connue $K\,(t)$ et que la $\mathcal{Y}$-transformée de cette convolution vérifie le théorème de multiplication, c'est-à-dire que

$$\mathcal{Y}\,[z * K] = \mathcal{Y}\,[z] \cdot \mathcal{Y}[K],$$

alors

$$\psi\,(u\,(\omega),\ \omega) = \frac{u\,(\omega)}{K\,(\omega)}, \qquad (4;\ 1{,}4)$$

où $K\,(\omega)$ est la $\mathcal{Y}$-transformée de la fonction $K\,(t)$. La formule (4 ; 1,4) reste vraie, par exemple, pour les convolutions des types suivants :

a) $$z\,(t) * K\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K\,(t-\tau)\,z\,(\tau)\,d\tau$$

si l'on emploie la transformation de Fourier ;

b) $$z\,(t) * K\,(t) = \int_{0}^{t} K\,(t-\tau)\,z\,(\tau)\,d\tau$$

($K\,(t) \equiv z\,(t) \equiv 0$ pour $t < 0$) si l'on a recours à la transformation unilatérale de Laplace ;

c) $$z\,(t) * K\,(t) = \int_{0}^{\infty} K\left(\frac{t}{\tau}\right) z\,(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}$$

si l'on se sert de la transformation de Mellin.

3. Plaçons-nous, pour fixer les idées, dans le cas

$$Az \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K\,(t-\tau)\,z\,(\tau)\,d\tau = u\,(t) \qquad (4;\ 1{,}5)$$

et utilisons la transformation de Fourier. Ici $u(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, $K(t) \in \mathscr{K} \subset L_1(-\infty, \infty)$,

$$z(t) \in F \subset L_1(-\infty, \infty).$$

Si le second membre de l'équation (4; 1,5) est défini de façon approchée, c'est-à-dire que $u(t) = u_{ex}(t) + v(t)$, où $v(t)$ est un bruit, alors

$$z(\omega) = \frac{u(\omega)}{K(\omega)} = \frac{u_{ex}(\omega)}{K(\omega)} + \frac{v(\omega)}{K(\omega)}.$$

Puisque $u_{ex}(\omega) = K(\omega) z_{ex}(\omega)$, on a

$$z(\omega) = z_{ex}(\omega) + \frac{v(\omega)}{K(\omega)}.$$

Cette formule définit la transformée de Fourier de la solution exacte de l'équation (4; 1,5) à second membre $u(t)$ approché. Il semblerait naturel de prendre en qualité de solution approchée de l'équation (4; 1,5) à second membre $u(t)$ approché la fonction obtenue par transformation de Fourier inverse, c'est-à-dire la fonction

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z_{ex}(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\omega)}{K(\omega)} \times$$
$$\times \exp(-i\omega t)\, d\omega = z_{ex}(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\omega)}{K(\omega)} \exp(-i\omega t)\, d\omega.$$

Or, cette fonction peut ne pas exister, car la dernière intégrale peut être divergente. En effet, de par la nature de la transformation de Fourier, les fonctions $K(\omega)$ et $v(\omega)$ tendent vers zéro pour $\omega \to \infty$, mais cette tendance n'est pas « coordonnée », parce que la fonction $v(t)$ (et, par conséquent, $v(\omega)$) a généralement un caractère aléatoire. Aussi la relation

$$v(\omega)/K(\omega)$$

peut-elle ne pas admettre de transformation de Fourier inverse à cause de l'influence des hautes fréquences ω de la fonction aléatoire $v(\omega)$. Cependant, même si la fonction $v(\omega)/K(\omega)$ admet bien la transformation inverse $w(t)$, l'écart de la fonction $w(t)$ du zéro (dans la métrique de C ou de L_2) peut être aussi grand que l'on veut.

On ne peut donc prendre en qualité de solution approchée de l'équation (4; 1,5) à second membre approché la solution exacte de cette équation; d'abord, la solution exacte peut être inexistante,

puis, même si elle existe, elle est instable vis-à-vis de faibles variations du second membre $u(t)$. L'instabilité de l'algorithme décrit de construction des « solutions » est due à l'influence des hautes fréquences ω dans la transformée de Fourier $v(\omega)$ du bruit $v(t)$. C'est pourquoi, si l'on désire construire des solutions approchées de l'équation (4 ; 1,5) stables vis-à-vis de faibles variations du second membre $u(t)$ à l'aide de la transformation de Fourier inverse, on doit « neutraliser » l'influence des hautes fréquences ω, par exemple en multipliant la fonction

$$u(\omega)/K(\omega)$$

par un facteur correspondant $f(\omega, \alpha)$ (qui dépend du paramètre α comme indiqué au § 1, ch. II) [11, 14, 15].

4. Revenons à l'équation (4; 1,2) et considérons l'opérateur

$$R_f(u, \alpha) = \mathscr{Y}^{-1}[\psi(u(\omega), \omega) \cdot f(\omega, \alpha)],$$

où $\mathscr{Y}^{-1}$ est la transformation inverse de $\mathscr{Y}$, et $f(\omega, \alpha)$ une fonction connue définie pour toutes les valeurs non négatives du paramètre α et pour tous ω sur lesquels on prend l'opérateur $\mathscr{Y}^{-1}$. En imposant à la fonction $f(\omega, \alpha)$ des conditions correspondantes, on fait de l'opérateur $R_f(u, \alpha)$ un opérateur régularisant pour l'équation (4; 1,2).

Pour fixer les idées, nous allons prendre dans la suite comme équation du type de convolution l'équation (4; 1,5) et utiliser en qualité de $\mathscr{Y}$ la transformation de Fourier. On aura alors

$$R_f(u, \alpha) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)} u(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega. \qquad (4\,;\,1{,}6)$$

Supposons que la fonction $f(\omega, \alpha)$ vérifie les conditions suivantes:

1_f) la fonction $f(\omega, \alpha)$ est définie dans le domaine ($\alpha \geqslant 0$, $-\infty < \omega < \infty$);

2_f) $0 \leqslant f(\omega, \alpha) \leqslant 1$ quels que soient $\alpha \geqslant 0$ et ω;

3_f) $f(\omega, 0) \equiv 1$;

4_f) pour tout $\alpha > 0$ la fonction $f(\omega, \alpha)$ est paire par rapport à ω et $f(\omega, \alpha) \in L_2(-\infty, \infty)$;

5_f) pour tout $\alpha > 0$ on a $f(\omega, \alpha) \to 0$ quand $\omega \to \pm\infty$;

6_f) pour $\alpha \to 0$ la fonction $f(\omega, \alpha) \to 1$ sans décroître, cette convergence étant uniforme sur tout intervalle $|\omega| \leqslant \omega_1$;

7_f) pour tout $\alpha > 0$ on a $\frac{f(\omega,\alpha)}{K(\omega)} \in L_2(-\infty, \infty)$;

8_f) pour tout $\omega \neq 0$ la fonction $f(\omega, \alpha) \to 0$ quand $\alpha \to \infty$, cette convergence étant uniforme sur tout intervalle $[\omega_1, \omega_2]$, $0 < \omega_1 < \omega_2$.

Ainsi donc, en imposant à la fonction $f(\omega, \alpha)$ les conditions 1_f) à 8_f), on définit l'opérateur $R_f(u, \alpha)$ à un paramètre de la forme (4; 1,6).

5. Si l'on estime l'écart du second membre de l'équation (4; 1,5) dans la métrique de $L_2(-\infty, \infty)$, et celui de la solution $z(t)$, dans la métrique de C, et que l'on pose $z(\omega) \in L_1(-\infty, \infty)$, on a alors le

Théorème. *Si la fonction $f(\omega, \alpha)$ vérifie les conditions 1_f) à 8_f), alors l'opérateur $R_f(u, \alpha)$ de la forme (4; 1,6) défini à l'aide de cette fonction est continu par rapport à u et représente un opérateur régularisant pour l'équation (4; 1,5).*

Démonstration. Montrons que l'opérateur $R_f(u, \alpha)$ est continu par rapport à u. En effet, estimons la différence

$$\Delta R_f = R_f(u_1, \alpha) - R_f(u_2, \alpha) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)} [u_1(\omega) - u_2(\omega)] \exp(-i\omega t)\, d\omega.$$

On a

$$|\Delta R_f| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)} \right| |u_1(\omega) - u_2(\omega)|\, d\omega.$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski, on obtient

$$|\Delta R_f| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f}{K} \right|^2 d\omega \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |u_1(\omega) - u_2(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2}.$$

En vertu de la propriété 7_f), l'intégrale

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)} \right|^2 d\omega$$

existe, ce qui signifie que la valeur de $\varphi(\alpha)$ est finie. Conformément au théorème de Plancherel *), l'écart de $u_1(t)$ par rapport à $u_2(t)$ dans la métrique de L_2, c'est-à-dire $\rho_{L_2}(u_1, u_2)$, est égal à

$$\frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |u_1(\omega) - u_2(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2}.$$

---

*) Pour toute fonction $u(t)$ de L_2 on a l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt.$$

Si $\rho_{L_2}(u_1, u_2) \leqslant \delta$, alors $|\Delta R_f| \leqslant \delta \sqrt{\varphi(\alpha)}$, d'où la continuité de l'opérateur $R_f(u, \alpha)$.

Si l'opérateur $R(u, \alpha)$ est continu par rapport à u et que pour tout $z \in F$ on a $\lim\limits_{\alpha \to 0} R(Az, \alpha) = z$, en vertu du théorème du § 1, ch. II, c'est un opérateur régularisant. Aussi pour démontrer le théorème proposé, suffit-il de prouver que pour toute fonction $z(t) \in F$ telle que $z(\omega) \in L_1$ a lieu l'égalité

$$\lim_{\alpha \to 0} R_f(Az, \alpha) = z(t),$$

où

$$Az \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau) z(\tau) \, d\tau.$$

Comme $u(\omega) = K(\omega) z(\omega)$, on a

$$|\Delta z| = |R_f(u, \alpha) - z(t)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} z(\omega) \{f(\omega, \alpha) - 1\} \exp(-i\omega t) \, d\omega \right|.$$

Donc,

$$|\Delta z| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |z(\omega)| \, |f(\omega, \alpha) - 1| \, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\omega_1} |z(\omega)| \, |f(\omega, \alpha) - 1| \, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\infty} |z(\omega)| \, |f(\omega, \alpha) - 1| \, d\omega +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} |z(\omega)| \, |f(\omega, \alpha) - 1| \, d\omega.$$

Puisque $0 \leqslant f(\omega, \alpha) \leqslant 1$, il vient

$$|\Delta z| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\omega_1} |z(\omega)| \, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\infty} |z(\omega)| \, d\omega +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} |z(\omega)| \, |f(\omega, \alpha) - 1| \, d\omega.$$

Etant donné que $z(\omega) \in L_1(-\infty, \infty)$, on trouve pour tout $\varepsilon > 0$ un $\omega_1(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $\omega_1 \geqslant \omega_1(\varepsilon)$ est vérifiée l'inégalité

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\omega_1} |z(\omega)| \, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\infty} |z(\omega)| \, d\omega \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

En vertu de la propriété 6_f) de la fonction $f(\omega, \alpha)$, il existe un $\alpha_0(\varepsilon)$ tel que pour $\alpha \leqslant \alpha_0(\varepsilon)$ aura lieu l'inégalité

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_1(\varepsilon)}^{\omega_1(\varepsilon)} |z(\omega)|\,|f(\omega, \alpha)-1|\,d\omega \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, étant donné un $\varepsilon > 0$, on trouve un $\alpha_0(\varepsilon)$ tel que pour $\alpha \leqslant \alpha_0(\varepsilon)$ on ait

$$|\Delta z| = |R_f(Az, \alpha) - z(t)| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui signifie que

$$\lim_{\alpha\to 0} R_f(Az, \alpha) = z(t),$$

d'où le théorème.

Ainsi donc, la fonction $z_\alpha(t) = R_f(u, \alpha)$ obtenue à l'aide de l'opérateur (4; 1,6) représente la solution régularisée de l'équation (4; 1,5). La fonction de deux variables $f(\omega, \alpha)$ de l'opérateur (4; 1,6), possédant les propriétés 1_f) à 8_f), sera appelée *facteur stabilisant.*

R e m a r q u e 1. Dans l'article [75], consacré à la résolution du problème de Cauchy pour l'équation de Laplace dans une bande, est employé le facteur stabilisant de la forme

$$f(\omega, \alpha) = e^{-\alpha^2\omega^2}.$$

R e m a r q u e 2. Si l'on pose

$$f(\omega, \alpha) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leqslant 1/h; \\ 0, & |\omega| > 1/h; \end{cases} \quad (\alpha = h),$$

où h est le pas du réseau sur lequel est cherchée la solution de (4; 1,5), on obtient une méthode connue de construction de la solution approchée de l'équation (4; 1,5).

6. Soit $M(\omega)$ une fonction paire donnée,

a) continue par morceaux sur tout intervalle fini;

b) non négative; $M(0) \geqslant 0$ et $M(\omega) > 0$ pour $\omega \neq 0$; de plus

c) pour des $|\omega|$ suffisamment grands, on a

$$M(\omega) \geqslant C > 0;$$

d) pour tout $\alpha > 0$ on a $\frac{K(-\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)} \in L_2(-\infty, \infty)$, où $L(\omega) = K(\omega)K(-\omega) = |K\omega|^2$. Posant

$$f(\omega, \alpha) = \frac{L(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)},$$

on obtient des classes d'opérateurs régularisants pour l'équation (4; 1,5); les classes se définissent par la donnée de la fonction $M(\omega)$.

7. En fixant $M(\omega)$, le paramètre de régularisation α peut être déterminé d'après le résidu. Si l'on estime l'écart du second membre $u(t)$ dans la métrique de L_2, le carré du résidu de la solution régularisée $z_\alpha(t)$ se calcule par la formule

$$\rho^2_{L_2}(Az_\alpha, u) = \int_{-\infty}^{\infty} [Az_\alpha - u(t)]^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega) z_\alpha(\omega) - u(\omega)|^2 d\omega = \Phi(\alpha).$$

Puisque

$$z_\alpha(\omega) = \frac{K(-\omega) u(\omega)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)},$$

on a

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 M^2(\omega) |u(\omega)|^2 d\omega}{\{L(\omega) + \alpha M(\omega)\}^2}.$$

Il est évident que $\Phi(0) = 0$, que

$$\Phi(\alpha) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |u(\omega)|^2 d\omega = \|u(t)\|^2_{L_2}$$

et que $\Phi(\alpha)$ tend vers $\| u(t) \|^2_{L_2}$ quand $\alpha \to \infty$. En outre,

$$\Phi'(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha L(\omega) M^2(\omega) |u(\omega)|^2 d\omega}{\{L(\omega) + \alpha M(\omega)\}^3} > 0.$$

Ainsi donc, le résidu de la solution régularisée est une fonction strictement croissante de la variable α variant entre 0 et $\| u(t) \|_{L_2}$. Par conséquent, si l'erreur sur le second membre u_δ de l'équation (4 ; 1,5) est égale à δ et que $\delta < \| u_\delta(t) \|_{L_2}$, il existe un nombre unique $\bar{\alpha}$ pour lequel $\Phi(\bar{\alpha}) = \delta^2$. Si $\delta \geqslant \| u_\delta(t) \|_{L_2}$, alors l'équation $\Phi(\alpha) = \delta^2$ n'a pas de solution.

8. Il est évident que $\Phi(\alpha)$ dépend du choix de la fonction $M(\omega)$, c'est-à-dire

$$\Phi(\alpha) = \Phi_M(\alpha).$$

Quand les valeurs de α sont faibles, ce sont les fréquences élevées qui apportent à $\Phi_M(\alpha)$ la contribution principale. C'est pourquoi, si $M_1(\omega) \geqslant M_2(\omega)$ pour des ω suffisamment grands, on a pour des α suffisamment petits

$$\Phi_{M_1}(\alpha) \geqslant \Phi_{M_2}(\alpha).$$

Prenant notamment $M_1(\omega) = \omega^{2p_1}$ et $M_2(\omega) = \omega^{2p_2}$, il vient pour $p_1 > p_2$

$$\Phi_{p_1}(\alpha) > \Phi_{p_2}(\alpha).$$

Il est évident que la solution $\bar{\alpha}$ de l'équation $\Phi_p(\alpha) = \delta^2$ dépend de p, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(p)$, et que pour $p_1 > p_2$ on a $\bar{\alpha}(p_1) < \bar{\alpha}(p_2)$. Ainsi donc, $\bar{\alpha}(p)$ décroît avec l'augmentation de l'ordre de régularisation p.

En ce qui concerne la recherche pratique de $\bar{\alpha}$ d'après le résidu, le lecteur est prié de se reporter au § 6, ch. II.

9. Il est facile de voir que la solution régularisée de l'équation (4; 1,5) déterminée par la formule

$$z_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(-\omega)\, u(\omega) \exp(-i\omega t)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)}\, d\omega \qquad (4;\ 1,7)$$

minimise la fonctionnelle

$$M^\alpha[z, u] = \int_{-\infty}^{\infty} (Az - u)^2\, dt + \alpha\Omega[z]$$

avec la fonctionnelle stabilisante de la forme

$$\Omega[z] = \int_{-\infty}^{\infty} M(\omega)\, |z(\omega)|^2\, d\omega. \qquad (4;\ 1,8)$$

Ici

$$Az \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau)\, z(\tau)\, d\tau.$$

Posant

$$M(\omega) = \sum_{n=0}^{p} q_n \omega^{2n},$$

où q_n sont des constantes non négatives données et $q_p > 0$, on recherche par la formule (4; 1,8) les stabilisateurs d'ordre p. Posant $M(\omega) = \omega^{2r}$, où r est un nombre positif quelconque, on obtient les stabilisateurs de la forme

$$\Omega[z] = B \int_{-\infty}^{\infty} |z^{(r)}(t)|^2\, dt,$$

où

$$z^{(r)}(t) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-r)} \int_{-\infty}^{t} (t-\tau)^{m-} \frac{d^{m+1}z}{d\tau^{m+1}}\, d\tau\ ^{*});$$

*) La fonction $z^r(t)$ peut être considérée comme une dérivée d'« ordre » r non entier.

ici m est un nombre entier non inférieur à la partie entière de r, c'est-à-dire que $m \geqslant E[r]$; B est un nombre positif.

On peut prendre pour $M(\omega)$ une fonction ayant un ordre de croissance quelconque lorsque $\omega \to \infty$. On obtient évidemment d'une façon analogue une multitude d'autres stabilisateurs $\Omega[z]$ par la formule (4 ; 1,8).

10. Le but que l'on se propose d'atteindre en étudiant les diverses familles d'opérateurs régularisants est de donner la possibilité de choisir le meilleur opérateur pour chaque problème ou pour chaque classe concrète de problèmes. Ce peut être par exemple un opérateur qui minimise l'écart (dans un sens déterminé *a priori*) de la solution régularisée $z_\alpha(t)$ par rapport à la solution exacte cherchée $z_{ex}(t)$, ou encore un opérateur se prêtant au mieux à la réalisation sur l'ordinateur.

Soit $\Phi(z_1, z_2)$ une fonctionnelle non négative donnée, définie sur l'ensemble des fonctions z_1 et z_2 qui contient les solutions régularisées $z_\alpha(t)$ de l'équation (4; 1,5) et la solution exacte $z_{ex}(t)$ (par exemple, la norme de l'écart de z_2 par rapport à z_1).

La fonctionnelle $\Phi(z_1, z_2)$ étant fixée, on peut poser les problèmes suivants :

Problème 1. Etant donné un facteur stabilisant fixé $f(\omega, \alpha)$, trouver une valeur α_0 du paramètre de régularisation α telle que

$$\Phi(z_{\alpha_0}, z_{ex}) = \inf_{\alpha} \Phi(z_\alpha, z_{ex}).$$

Problème 2. Soit $\mathscr{F}_f \equiv \{f(\omega, \alpha)\}$ une famille donnée de facteurs stabilisants. On demande de trouver dans la famille de fonctions $\mathscr{F}_f$ une fonction $f_0(\omega, \alpha)$ et une valeur du paramètre de régularisation $\alpha = \alpha_{opt}$ telles que la fonctionnelle $\Phi(z_\alpha, z_{ex})$ passe par le minimum, c'est-à-dire que

$$\Phi(z^0_{\alpha_{opt}}, z_{ex}) = \inf_{\left\{\substack{f \in \mathscr{F}_f \\ \alpha > 0}\right.} \Phi(z_\alpha, z_{ex}).$$

Ici

$$z^0_{\alpha_{opt}} = R_{f_0}(u, \alpha_{opt}).$$

On dit que l'opérateur régularisant $R_{f_0}(u, \alpha_{opt})$ répondant à la fonction $f_0(\omega, \alpha)$ et à la valeur de l'opérateur de régularisation $\alpha = \alpha_{opt}$ est *optimal sur la famille* $\mathscr{F}_f$ et que la valeur α_{opt} est la *valeur optimale du paramètre de régularisation* sur cette famille. La solution régularisée de l'équation (4 ; 1,5) obtenue à l'aide de l'opérateur régularisant optimal sera dite *solution régularisée optimale*.

Il est parfois impossible de trouver sur $\mathscr{F}_f$ le facteur (algorithme) stabilisant optimal ; on indique alors un facteur « voisin » (dans un sens déterminé) de ce dernier. Il y a donc intérêt à considérer le

Problème 3. Estimer $\Phi(z_{\alpha_1, f_1}, z_{\alpha_2, f_2})$ sous la condition que $\rho_{\mathcal{F}}(f_1, f_2) \leqslant \delta$, où $z_{\alpha_1, f_1} = R_{f_1}(u, \alpha_1)$, $z_{\alpha_2, f_2} = R_{f_2}(u, \alpha_2)$, et $\rho_{\mathcal{F}}(f_1, f_2)$ est une métrique dans $\mathcal{F}_f$.

Les problèmes proposés (et leurs modifications) seront examinés dans ce chapitre et dans le chapitre suivant.

§ 2. Ecart de la solution régularisée par rapport à la solution exacte

1. Considérons de nouveau l'équation (4; 1,5). Soit $u(t) = u_{ex}(t) + v(t)$, où $v(t)$ est un bruit. Nous admettons que $v(t)$ est une fonction aléatoire sans corrélation avec la solution cherchée $z_{ex}(t)$ et que son espérance mathématique est égale à zéro, $\overline{v(t)} = 0$.

On peut mettre la solution régularisée sous la forme

$$z_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)} u_{ex}(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)} v(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega.$$

Donc,

$$z_\alpha(t) - z_{ex}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \{f(\omega, \alpha) - 1\} \frac{u_{ex}(\omega)}{K(\omega)} \times \exp(-i\omega t)\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)} v(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega. \quad (4;2,1)$$

Le premier terme du second membre de la formule (4; 2,1) caractérise l'influence de la régularisation (quand le second membre de l'équation est exact), et le deuxième, l'influence du bruit sur le second membre de l'équation (4; 1,5).

Soit

$$\Delta_r(t, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \{f(\omega, \alpha) - 1\} \frac{u_{ex}(\omega)}{K(\omega)} \exp(-i\omega t)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \{f(\omega, \alpha) - 1\} z_{ex}(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega; \quad (4;2,2)$$

$$\Delta_{br}(t, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)} v(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega. \quad (4;2,3)$$

Alors

$$z_\alpha(t) - z_{ex}(t) = \Delta_r(t, \alpha) + \Delta_{br}(t, \alpha).$$

On a montré au § 1 du présent chapitre (voir théorème du point 5) que $\Delta_r(t, \alpha)$ tend uniformément en t vers zéro lorsque $\alpha \to 0$. Puisque $v(t)$ est une fonction aléatoire, $\Delta_{br}(t, \alpha)$ est aussi une fonction aléatoire, et son espérance mathématique est égale à zéro, $\overline{\Delta_{br}(t, \alpha)} = 0$.

R e m a r q u e. Si $f(t)$ est une fonction (un processus) aléatoire, on dit que la fonction

$$R(t_1, t_2) = \overline{f(t_1)\, f(t_2)}$$

est la *fonction d'autocorrélation du processus* $f(t)$. Pour des processus aléatoires *stationnaires*, la fonction d'autocorrélation dépend seulement de la différence des arguments $t_2 - t_1$:

$$\overline{f(\tau)\, f(t+\tau)} = R(t).$$

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire stationnaire $f(t)$ porte le nom de sa *densité spectrale* $S(\omega)$. Il est bien connu que sur l'axe réel la fonction $S(\omega)$ représente une fonction non négative paire pour laquelle $S(0) \geqslant S(\omega)$ et $S(\omega) \to 0$ quand $\omega \to \infty$ *).

2. Dans la suite nous supposerons que $v(t)$ est une réalisation d'un processus aléatoire stationnaire de densité spectrale $S(\omega)$. Sous cette hypothèse, la variance de la fonction aléatoire $\Delta_{br}(t, \alpha)$ (variance de l'influence du bruit) est égale à

$$\overline{\Delta_{br}^2(t, \alpha)} = \sigma^2(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2(\omega, \alpha)}{L(\omega)} S(\omega)\, d\omega, \qquad (4\,;\,2{,}4)$$

où

$$L(\omega) = K(\omega)\, K(-\omega).$$

En vertu de la propriété 6_f) de la fonction $f(\omega, \alpha)$, il est évident que $\sigma^2(\alpha)$ croît quand $\alpha \to 0$. Si

$$\frac{S(\omega)}{L(\omega)} \in L_1(-\infty, \infty),$$

alors, lorsque $\alpha \to 0$, $\sigma^2(\alpha)$ croît en tendant vers une valeur finie $\sigma^2(0)$. Au contraire, si

$$\frac{S(\omega)}{L(\omega)} \notin L_1(-\infty, \infty),$$

alors $\sigma^2(\alpha) \to \infty$ quand $\alpha \to 0$. Des propriétés de la fonction $f(\omega, \alpha)$ il découle immédiatement que $\sigma^2(\alpha) \to 0$ pour $\alpha \to \infty$.

*) A. Svechnikov. *Méthodes appliquées de la théorie des fonctions aléatoires* (en russe). « Naouka », 1968.

3. La métrique dans laquelle on estime l'écart de $z_\alpha(t)$ par rapport à $z_{ex}(t)$ est choisie conformément à la nature de l'information disponible sur le bruit intervenant dans le second membre de l'équation. Si $v(t)$ est une fonction aléatoire, il est logique de choisir une métrique probabilisée.

Nous allons estimer l'écart de $z_\alpha(t)$ par rapport à $z_{ex}(t)$ par la formule

$$\rho_F^2(z_\alpha, z_{ex}) = \sup_t \overline{[z_\alpha(t) - z_{ex}(t)]^2}.$$

Soit

$$\Delta_r^2(\alpha) = \sup_t \Delta_r^2(t, \alpha).$$

Alors

$$T_f(\alpha) = \sup_t \overline{[z_\alpha(t) - z_{ex}(t)]^2} = \Delta_r^2(\alpha) + \sigma^2(\alpha). \qquad (4;2,5)$$

Lorsque $\alpha \to 0$, $\Delta_r^2(\alpha) \to 0$ (voir page 96) et $\sigma^2(\alpha)$ croît monotonement. Donc, pour un certain $\alpha = \alpha_0$ *), $T_f(\alpha)$ passe par sa valeur minimale. On dit que la valeur α_0 est la *valeur* (C, f)*-optimale* du paramètre de régularisation. La solution régularisée obtenue pour $\alpha = \alpha_0$ sera asymptotiquement la meilleure (pour $\alpha \to 0$) au sens de $\min_\alpha T_f(\alpha)$ dans la classe des solutions régularisées correspondant à la fonction donnée $f(\omega, \alpha)$.

Il y a intérêt à considérer les classes d'équations du type (4; 1,5) dans lesquelles on peut, en s'appuyant sur l'information relative à la solution cherchée et au bruit, déterminer la valeur (C, f)-optimale, ou une valeur sensiblement voisine de celle-ci, du paramètre de régularisation α. De la définition elle-même de la valeur (C, f)-optimale de α_0, on voit que, si l'on veut calculer cette valeur, on doit savoir calculer $\Delta_r^2(\alpha)$ et $\sigma^2(\alpha)$ pour de faibles valeurs de α, c'est-à-dire qu'on doit savoir rechercher les représentations asymptotiques des fonctions $\Delta_r^2(t, \alpha)$, $\Delta_r^2(\alpha)$ et $\sigma^2(\alpha)$ pour $\alpha \to 0$. Il est donc nécessaire de faire une estimation asymptotique des quantités $\Delta_r^2(t, \alpha)$, $\Delta_r^2(\alpha)$ et $\sigma^2(\alpha)$ pour $\alpha \to 0$. Au § 3, de telles estimations seront faites pour certaines classes d'équations.

4. Il peut sembler de prime abord que les estimations indiquées doivent être effectuées pour chaque facteur stabilisant $f(\omega, \alpha)$. On indique cependant (voir [14, 15]) des classes de facteurs stabilisants dont tous les facteurs ont les mêmes estimations asymptotiques de $\Delta_r^2(t, \alpha)$, de $\Delta_r^2(\alpha)$ et de $\sigma^2(\alpha)$ pour $\alpha \to 0$. Il suffit donc d'obtenir les estimations indiquées pour les seuls facteurs stabilisants élémentaires de chaque classe considérée.

D é f i n i t i o n. On dit que les facteurs stabilisants $f_1(\omega, \alpha_1)$ et $f_2(\omega, \alpha_2)$ sont *asymptotiquement* ε*-voisins* si pour un $\varepsilon > 0$ donné

*) Si cette valeur n'est pas unique, on prend la plus petite.

il existe un $\alpha_0(\varepsilon)$ tel que pour un α_1 et un α_2 inférieurs à $\alpha_0(\varepsilon)$ et tels que $\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}-1\right| \leqslant \min\{\alpha_1^2, \alpha_2^2\}$ on ait l'inégalité

$$\left\| \frac{f_1(\omega, \alpha_1)}{K(\omega)} - \frac{f_2(\omega, \alpha_2)}{K(\omega)} \right\|_{L_2} \leqslant \varepsilon \text{ *)}.$$

Si l'on prend

$$f(\omega, \alpha) = \frac{L(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)},$$

alors les facteurs stabilisants

$$f_1(\omega, \alpha_1) = \frac{L(\omega)}{L(\omega)+\alpha_1 M_1(\omega)},$$

$$f_2(\omega, \alpha_2) = \frac{L(\omega)}{L(\omega)+\alpha_2 M_2(\omega)}$$

définis par les fonctions

$$M_1(\omega) = \omega^{2p}, \tag{4; 2,6}$$

$$M_2(\omega) = \omega^{2p} + q_{p-1}\omega^{2p-2} + \ldots + q_0, \tag{4; 2,7}$$

où

$$q_0, q_1, \ldots, q_{p-1} \geqslant 0,$$

sont asymptotiquement ε-voisins pour tout $\varepsilon > 0$.

5. Proposons-nous d'estimer la différence entre deux solutions régularisées de l'équation (4; 1,5) obtenues à l'aide de deux facteurs stabilisants asymptotiquement ε-voisins $f_1(\omega, \alpha_1)$ et $f_2(\omega, \alpha_2)$. Il est évident que

$$|z_{\alpha_1, f_1}(t) - z_{\alpha_2, f_2}(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f_1(\omega, \alpha_1)}{K(\omega)} - \frac{f_2(\omega, \alpha_2)}{K(\omega)} \right| |u(\omega)|\, d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \left\| \frac{f_1(\omega, \alpha_1)}{K(\omega)} - \frac{f_2(\omega, \alpha_2)}{K(\omega)} \right\|_{L_2} \cdot \| u(t) \|_{L_2} \leqslant \varepsilon \| u(t) \|_{L_2}.$$

Du moment que les facteurs stabilisants définis par les fonctions (4; 2,6) et (4; 2,7) sont asymptotiquement ε-voisins pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit, en considérant par exemple les solutions régularisées obtenues à l'aide des stabilisateurs d'ordre p à coefficients constants, d'avoir les estimations asymptotiques des fonctions $\Delta_r^2(t, \alpha)$, $\Delta_r^2(\alpha)$ et $\sigma^2(\alpha)$ pour $\alpha \to 0$ seulement pour les solutions régularisées trouvées au moyen des *stabilisateurs élémentaires d'ordre p*, donc pour $M(\omega) = \omega^{2p}$.

---

*) $\| \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega) \|_{L_2}$ est la distance des fonctions $\varphi_1(\omega)$ et $\varphi_2(\omega)$ dans la métrique de $L_2(-\infty, \infty)$.

§ 3. Estimations asymptotiques de l'écart de la solution régularisée d'une équation du type de convolution par rapport à la solution exacte pour $\alpha \to 0$

1. Nous allons déduire, après [9, 10], les formules asymptotiques de $\Delta_r(t, \alpha)$ et de $\sigma^2(\alpha)$ pour certains types d'équations de la forme (4; 1,5). Ces types se distinguent par le comportement asymptotique de la transformée de Fourier du noyau $K(\omega)$ pour $|\omega| \to \infty$. Quatre types d'équations seront examinés ici.

Ier type. $K(\omega)$ est une fonction rationnelle sans zéros sur l'axe réel, qui tend vers zéro pour $\omega \to \infty$ comme

$$\frac{A}{\omega^n},$$

où n est un entier positif.

IIe type. La fonction $K(\omega)$ a tous ses points singuliers (sauf le point à l'infini) dans un domaine borné. Pour tout $B > 0$ l'intégrale

$$\int_0^B \frac{d\omega}{L(\omega)}$$

converge. Lorsque $\omega \to \infty$, $K(\omega)$ a la représentation asymptotique de la forme $K(\omega) = H \exp\left[-(iA\omega)^{\frac{1}{m}}\right]$, où $m > 1$, $A > 0$.

IIIe type. Quand $\omega \to \infty$, la fonction $K(\omega)$ a la représentation asymptotique

$$K(\omega) = H \exp(-A\omega^2),$$

où $H > 0$ et $A > 0$.

IVe type. Lorsque $|\omega| \to \infty$, la fonction $K(\omega)$ a la représentation asymptotique

$$K(\omega) = \frac{A}{\omega^n (\underbrace{\ln \ln \ldots \ln}_{s \text{ fois}} |\omega|)^k},$$

où $A > 0$, n, s, k sont des entiers tels que $s \geqslant 0$, $n \geqslant 0$; si $n > 0$, alors k est quelconque; si $n = 0$, alors $k > 0$, $s > 0$.

2. Les problèmes suivants se réduisent aux équations à noyaux des types énumérés:

— calcul de la dérivée d'ordre n (Ier type);

— problèmes de régulation automatique (Ier type);

— reconstitution des signaux électromagnétiques déformés par passage à travers un filtre à paramètres concentrés (capacité, inductance, résistance) (Ier type);

— reconstitution des signaux électromagnétiques déformés par passage dans une ligne longue avec pertes (un câble, un milieu conducteur) (IIe type, $m = 2$);

— reconstitution des signaux électromagnétiques transmis suivant une surface sphérique et captés dans la zone de l'ombre géométrique (IIe type);

— reconstitution des signaux sonores propagés dans un milieu visqueux (IIIe type), et ainsi de suite.

3. Admettons que la densité spectrale $S(\omega)$ du bruit a sur l'axe réel, pour $|\omega| \to \infty$, la représentation asymptotique de la forme

$$S(\omega) = \frac{S_0}{\omega^a},$$

où a et S_0 sont des constantes, $a \geqslant 0$, $S_0 > 0$. Pour $a = 0$ et $S(\omega) = S_0$ on a le « bruit blanc ». S_0 détermine le niveau du bruit.

Nous allons nous borner, dans la suite, à considérer les représentations asymptotiques des fonctions $\Delta_r(t, \alpha)$ et $\sigma^2(\alpha)$ seulement pour les stabilisateurs à coefficients constants $q_l(s) = q_l = \text{const}$. On a alors

$$M(\omega) = \omega^{2p} + q_{p-1}\omega^{2p-2} + \ldots + q_0$$

(pour un stabilisateur d'ordre p).

Puisque les facteurs stabilisants $\frac{L(\omega)}{L\omega + \alpha M(\omega)}$ définis par les fonctions

$$M_1(\omega) = \omega^{2p} + q_{p-1}\omega^{2p-2} + \ldots + q_0,$$
$$M_2(\omega) = \omega^{2p}$$

sont asymptotiquement ε-voisins pour tout $\varepsilon > 0$, conformément au § 2 de ce chapitre, il suffit d'effectuer les estimations asymptotiques des fonctions $\Delta_r(t, \alpha)$ et $\sigma^2(\alpha)$, seulement pour les fonctions $M(\omega) = \omega^{2p}$.

4. **Estimation de $\Delta_r(t, \alpha)$ pour les équations à noyaux du Ier type.** Pour un stabilisateur d'ordre p et $M(\omega) = \omega^{2p}$, la solution régularisée de l'équation (4; 1,5) à second membre exact $u_{ex}(t)$ s'écrit

$$z_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\omega)\, z_{ex}(\omega)}{L(\omega) + \alpha\omega^{2p}} \exp(-i\omega t)\, d\omega$$

ou bien

$$z_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} L_\alpha(t-\tau)\, z_{ex}(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} L_\alpha(\xi) \cdot z_{ex}(t-\xi)\, d\xi, \qquad (4;\ 3,1)$$

où

$$L_\alpha(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L(\omega)\exp(-i\omega t)}{L(\omega)+\alpha\omega^{2p}}\,d\omega \qquad (4\,;\,3{,}2)$$

est une fonction paire. Aussi

$$z_\alpha(t)=\int_0^{\infty}L_\alpha(\xi)\{z_{\text{ex}}(t-\xi)+z_{\text{ex}}(t+\xi)\}\,d\xi. \qquad (4\,;\,3{,}3)$$

Cette dernière intégrale est égale à la somme des résidus de la fonction à intégrer (multipliée par $2\pi i$) en ses pôles situés dans le demi-plan supérieur (pour $t<0$) et dans le demi-plan inférieur (pour $t>0$). Seuls seront pôles de la fonction les zéros du dénominateur $L(\omega)+\alpha\omega^{2p}$ appartenant à l'un des deux types suivants:

1) les zéros $\omega_{1\alpha}$ qui tendent pour $\alpha\to 0$ vers les zéros de la fonction $L(\omega)$;

2) les zéros $\omega_{2\alpha}$ qui tendent vers l'infini quand $\alpha\to 0$. Considérons la contribution des uns et des autres dans $L_\alpha(t)$.

Pour les zéros du premier type on a $\omega_{1\alpha}\to\omega_1$ pour $\alpha\to 0$. Si ω_1 est un zéro simple de la fonction $L(\omega)$, alors

$$\operatorname{res}\left\{\frac{L(\omega)\exp(-i\omega t)}{L(\omega)+\alpha\omega^{2p}}\right\}_{\omega=\omega_{1\alpha}}=\frac{L(\omega_{1\alpha})\exp(-i\omega_{1\alpha}t)}{2p\alpha\omega_{1\alpha}^{2p-1}+\left(\frac{dL}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_{1\alpha}}}=$$

$$=\frac{(\omega_{1\alpha}-\omega_1)\cdot\left(\frac{dL}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_1}}{2p\alpha\omega_1^{2p-1}+\left(\frac{dL}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_1}}\exp(-i\omega_1 t)+O[(\omega_{1\alpha}-\omega_1)^2]=$$

$$=(\omega_{1\alpha}-\omega_1)\exp(-i\omega_1 t)\,[1+O(\alpha)]+O[(\omega_{1\alpha}-\omega_1)^2].$$

Puisque

$$f(\omega)=L(\omega)+\alpha\omega^{2p}=f(\omega_1)+(\omega-\omega_1)\left(\frac{df}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_1}+O[(\omega_1-\omega)^2],$$

$$f(\omega_{1\alpha})=0 \quad \text{et} \quad L(\omega_1)=0,$$

on a

$$0=\alpha\omega_1^{2p}+\left[\left(\frac{dL}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_1}+2p\alpha\omega_1^{2p-1}\right](\omega_\alpha-\omega_1)+O[(\omega_{1\alpha}-\omega_1)^2].$$

D'où

$$\omega_{1\alpha}-\omega_1=\frac{-\alpha\omega_1^{2p}}{\left(\frac{dL}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_1}}\{1+O(\alpha)+O[(\omega_{1\alpha}-\omega_1)^2]\}.$$

Donc,

$$\omega_{1\alpha}-\omega_1=\frac{-\alpha\omega_1^{2p}}{\left(\frac{dL}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_1}}\{1+O(\alpha)\}$$

et donc

$$\text{res}\left\{\frac{L(\omega)\exp(-i\omega t)}{L(\omega)+\alpha\omega^{2p}}\right\}_{\omega=\omega_{1\alpha}}=\frac{-\alpha\omega_1^{2p}}{\left(\frac{dL}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_1}}\times$$

$$\times\exp(-i\omega_1 t)[1+O(\alpha)]=O(\alpha)\exp(-i\omega_1 t).$$

Si ω_1 est un zéro d'ordre de multiplicité γ, alors, en supposant que la fonction $L(\omega)$ est $(\gamma-1)$ fois différentiable, on trouve au moyen de calculs analogues que

$$\text{res}\left\{\frac{L(\omega)\exp(-i\omega t)}{L(\omega)+\alpha\omega^{2p}}\right\}_{\omega=\omega_{1\alpha}}=O(\alpha^{1/\gamma})\exp(-i\omega_1 t).$$

Le nombre des zéros du premier type est fini et indépendant de α. C'est pourquoi la contribution des pôles du premier type $\omega_{1\alpha}$ à la fonction $L_\alpha(t)$ sera égale à $O(\alpha^{1/\gamma_0})$, où γ_0 est le plus grand ordre de multiplicité des zéros de la fonction $L(\omega)$.

5. Examinons la contribution des pôles du deuxième type $\omega_{2\alpha}$. Puisque $\omega_{2\alpha}\to\infty$ pour $\alpha\to 0$, on peut, pour des α suffisamment petits, utiliser la représentation asymptotique de la fonction $L(\omega)$, c'est-à-dire poser $L(\omega)=|A|^2/\omega^{2n}$. Aussi

$$\text{res}\left\{\frac{L(\omega)\exp(-i\omega t)}{L(\omega)+\alpha\omega^{2p}}\right\}_{\omega=\omega_{2\alpha}}=\frac{|A|^2\exp(-i\omega_{2\alpha}t)\cdot\omega_{2\alpha}}{2q\alpha\omega_{2\alpha}^{2q}},$$

$$q=n+p.$$

Ainsi donc, la contribution $L_{2\alpha}(t)$ des pôles du deuxième type à $L_\alpha(t)$ est égale (pour $t\leqslant 0$) à

$$L_{2\alpha}(t)=-\sum\frac{|A|^2\,i\omega_{2\alpha}\exp(-i\omega_{2\alpha}t)}{2q\alpha\omega_{2\alpha}^{2q}},$$

où la somme est prise sur toutes les racines du deuxième type de l'équation $L(\omega)+\alpha\omega^{2p}=0$ (situées dans le demi-plan supérieur). Lorsque α est faible, on peut remplacer ces racines par les racines $\omega_\alpha^{(k)}$ de l'équation

$$1+\frac{\alpha}{|A|^2}\omega^{2q}=0. \qquad (4\,;\,3{,}4)$$

Donc,

$$L_{2\alpha}(t)=-\sum_k\frac{i\omega_\alpha^{(k)}\exp(-i\omega_\alpha^{(k)}t)}{2q} \qquad (4\,;\,3{,}5)$$

pour $t \leqslant 0$. De même,

$$L_{2\alpha}(t) = \sum_k \frac{i\omega_\alpha^{(k)} \exp(-i\omega_\alpha^{(k)} t)}{2q} \qquad (4\,;\,3{,}6)$$

pour $t \geqslant 0$. Ici les sommes sont prises sur toutes les racines de l'équation (4; 3,4) situées dans le demi-plan supérieur (resp. inférieur) pour $t \leqslant 0$ (resp. $t \geqslant 0$).

Quand $\alpha \to 0$, les racines $\omega_\alpha^{(k)}$ tendent vers l'infini le long des rayons

$$\arg\omega = \frac{2k+1}{2q}\pi \; (k \leqslant n) \quad \text{et} \quad |\omega_\alpha^{(k)}| = \left(\frac{|A|^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2q}}.$$

Signalons que $n+p$ racines de l'équation (4; 3,4) se situent dans le demi-plan supérieur et $n+p$ racines, dans le demi-plan inférieur.

Changeant dans (4; 3,3) $L_\alpha(t)$ en $L_{2\alpha}(t)$, nous avons par la formule (4; 3,6) pour $t \geqslant 0$

$$z_\alpha(t) = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{q} \frac{+i\omega_\alpha^{(k)} \exp(-i\omega_\alpha^{(k)}\xi)}{2q} \{z_{ex}(t+\xi) + z_{ex}(t-\xi)\}\, d\xi \quad (4\,;\,3{,}7)$$

ou

$$z_\alpha(t) = \frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q} \int_0^\infty \{-i\omega_\alpha^{(k)} \exp(-i\omega_\alpha^{(k)}\xi)\,[z_{ex}(t+\xi) + z_{ex}(t-\xi)]\}\, d\xi. \quad (4\,;3{,}8)$$

Pour estimer ces intégrales, nous allons nous servir de la formule asymptotique

$$\int_0^\infty f(t \pm \xi)\, \beta \exp(-\beta\xi)\, d\xi = f(t) + \frac{1}{\beta} f'(t) + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right),$$

valable pour de grandes valeurs de $\operatorname{Re}\beta > 0$ et qui s'établit par double intégration par parties. On pose $\beta = i\omega_\alpha^{(k)}$. Remarquant que la sommation dans la formule (4; 3,7) se fait seulement sur les racines de (4; 3,4) situées dans le demi-plan inférieur, on a $\operatorname{Re}(i\omega_\alpha^{(k)}) > 0$. On pose ici $f(t) = z_{ex}(t)$. Il vient

$$z_\alpha(t) = \frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q} \left\{ 2z_{ex}(t) + \frac{2i}{\omega_\alpha^{(k)}} z'_{ex}(t) \right\} + O([\omega_\alpha^{(k)}]^{-2}).$$

Comme

$$\omega_\alpha^{(k)} = \left(\frac{|A|^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2q}} e^{i\frac{2k+1}{2q}\pi},$$

on a

$$z_\alpha(t) = z_{ex}(t) + \frac{1}{q}\left(\frac{|A|^2}{\alpha}\right)^{\frac{-1}{2q}} \frac{z'_{ex}(t)}{\sin\left(\frac{\pi}{2q}\right)}\left[1 + O\left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)\right] \text{*)}.$$

On a fait usage des relations

$$\sum_{k=0}^{q} \cos\left(\frac{2k+1}{2q}\pi\right) = 0, \quad \sum_{k=0}^{q} \sin\left(\frac{2k+1}{2q}\pi\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2q}\right)}.$$

On obtient alors pour $\Delta_r^2(t, \alpha)$ la formule asymptotique suivante (pour $\alpha \to 0$):

$$\Delta_r^2(t, \alpha) = \frac{1}{q^2}\sin^{-2}\left(\frac{\pi}{2q}\right)\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\frac{1}{q}}\left|\frac{dz_{ex}}{dt}\right|^2\left[1 + O\left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)\right]. \quad (4;\,3{,}9)$$

D'où le

Théorème 1. *Pour une régularisation d'ordre p de l'équation* (4; 1,5) *à noyaux du premier type, on a* (*pour* $\alpha \to 0$) *la formule asymptotique* (4; 3,9) [10].

Cette formule reste vraie, en particulier, quand les stabilisateurs sont d'ordre zéro, $p = 0$.

On sait [185] qu'avec les stabilisateurs d'ordre zéro la solution régularisée $z_\alpha(t)$ de l'équation à second membre exact $u_{ex}(t)$ ne saura pas en général approcher uniformément sur $(-\infty, \infty)$ la solution exacte $z_{ex}(t)$ pour $\alpha \to 0$. Du résultat obtenu ci-dessus (formule) 4; 3,9) pour $p = 0$), on tire le

Corollaire. *Si la dérivée de la solution cherchée* $z_{ex}(t)$ *de l'équation* (4; 1,5) *à noyau du* Ier *type et à second membre* $u = u_{ex}(t)$ *est uniformément bornée sur* $(-\infty, \infty)$, *alors la solution régularisée* $z_\alpha(t)$ *de l'équation* (4; 1,5) *obtenue à l'aide d'un stabilisateur d'ordre p* ($p = 0, 1, 2, \ldots$) *approche uniformément, pour* $\alpha \to 0$, *la solution exacte* $z_{ex}(t)$ *sur toute la droite* $(-\infty, \infty)$.

6. Estimations de $\Delta_r(t, \alpha)$ pour les équations à noyaux des types II à IV. Pour les équations à noyaux des types II à IV ont lieu les théorèmes suivants:

Théorème 2. *En utilisant les stabilisateurs d'ordre p à coefficients constants pour la recherche de la solution régularisée de l'équation*

---

*) En posant $\gamma_0 < 2q$.

(4; 1,5) *à noyaux du* IIe *type, on a les formules asymptotiques (pour* $\alpha \to 0$) *suivantes* [10]:

$$\Delta_r(t, \alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} A \left(\frac{C_m}{\beta_2}\right)^m z'_{ex}(t)\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_2}\right)\right], \quad (4;3,10)$$

$$\Delta_r(t, \alpha) = \frac{A^{2p+1}}{2p+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{C_m}{\beta_2}\right)^{(2p+1)m} \frac{d^{2p+1}z_{ex}}{dt^{2p+1}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_2}\right)\right], \quad (4;3,11)$$

où

$$C_m = 2\cos\left(\frac{\pi}{2m}\right), \quad \beta_2 = \ln\left(\frac{H^2A^{2p}}{\alpha}\right).$$

Théorème 3. *En utilisant les stabilisateurs d'ordre p à coefficients constants pour la recherche de la solution régularisée de l'équation* (4; 1,5) *à noyaux du* IIIe *type, on a les formules asymptotiques (pour* $\alpha \to 0$) *suivantes* [10]:

$$\Delta_r(t, \alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2A}{\beta_3}\right)^{1/2} \frac{dz_{ex}}{dt}\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_3}\right)\right], \quad (4;3,12)$$

$$\Delta_r(t, \alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2p+1}\left(\frac{2A}{\beta_3}\right)^{\frac{2p+1}{2}} \frac{d^{2p+1}z_{ex}}{dt^{2p+1}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_3}\right)\right], \quad (4;3,13)$$

où

$$\beta_3 = \ln\left[\frac{2^pA^pH^2}{\alpha}\right].$$

Théorème 4. *En utilisant les stabilisateurs d'ordre p à coefficients constants pour la recherche de la solution régularisée de l'équation* (4; 1,5) *à noyaux du* IVe *type, on a les formules asymptotiques (pour* $\alpha \to 0$) *suivantes* [10]:

$$\Delta_r(t, \alpha) = \frac{1}{q\sin\left(\frac{\pi}{2q}\right)}\left(\frac{\alpha}{A^2}\beta_4^{2k}\right)^{\frac{1}{2q}} \frac{dz_{ex}}{dt}\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_4}\right)\right], \quad (4;3,14)$$

$$\Delta_r(t, \alpha) = \frac{1}{q\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)}\left(\frac{\alpha}{A^2}\beta_4^{2k}\right)^{\frac{2p+1}{2q}} \frac{d^{2p+1}z_{ex}}{dt^{2p+1}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_4}\right)\right], \quad (4;3,15)$$

où

$$\beta_4 = \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{s \text{ fois}}\left[\left(\frac{A^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2q}}\right].$$

Pour la démonstration des formules de $\Delta_r(t, \alpha)$ figurant dans les théorèmes 2 à 4 on procède de la même façon que pour le théorème 1, par calcul des intégrales correspondantes à l'aide des résidus;

seulement ils sont plus encombrants (voir [10, 13]), et nous omettrons de les donner ici.

7. Estimation de $\sigma^2(\alpha)$ dans le cas des équations à noyaux des types I à IV. Lorsque

$$f(\omega, \alpha) = \frac{L(\omega)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)},$$

la formule (4; 2,4) devient

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{L(\omega) S(\omega) d\omega}{\{L(\omega) + \alpha M(\omega)\}^2}. \tag{4; 3,16}$$

On déduit immédiatement de cette formule que pour les équations à noyaux des types I à IV (en posant pour le Ier et le IVe types $n > \max(\alpha; {}^1/_2)$) on a $\sigma^2(\alpha) \to \infty$ quand $\alpha \to 0$. D'autre part, l'intégrale (4; 3,16) converge pour tout $\alpha > 0$ fixé. Ce sont donc les fréquences élevées ω qui apportent à l'intégrale (4; 3,16) la contribution principale lorsque le paramètre α est petit. Ceci établi, mettons l'intégrale (4; 3,16) sous forme d'une somme de deux intégrales:

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\omega_0} \ldots + \frac{1}{2\pi^2} \int_{\omega_0}^\infty \ldots$$

On choisira ω_0 suffisamment grand pour pouvoir substituer aux fonctions $L(\omega)$ et $S(\omega)$ leurs représentations asymptotiques quand $\omega \geqslant \omega_0$. Alors, pour $M(\omega) = \omega^{2p}$, on a

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\omega_0} \left\{ \frac{L \cdot S}{(L + \alpha\omega^{2p})^2} - \frac{L_{as} \cdot S_{as}}{(L_{as} + \alpha\omega^{2p})^2} \right\} d\omega +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{L_{as} \cdot S_{as}\, d\omega}{(L_{as} + \alpha\omega^{2p})^2}.$$

En posant $S(0) = D \cdot S_0$ $(D > 0)$ et en se rappelant que $S(\omega) \leqslant \leqslant S(0)$ pour tout ω, on trouve directement que pour $\alpha \to 0$

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\omega_0} \left\{ \frac{L \cdot S}{(L + \alpha\omega^{2p})^2} - \frac{L_{as} S_{as}}{(L_{as} + \alpha\omega^{2p})^2} \right\} d\omega = S_0 \cdot O(1).$$

Ici $S_{as}(\omega)$ et $L_{as}(\omega)$ sont les valeurs des fonctions $S(\omega)$ et $L(\omega)$ calculées par les formules asymptotiques correspondantes.

Par conséquent,

$$\sigma^2(\alpha) = S_0 \cdot O(1) + I_1, \tag{4; 3,17}$$

et il reste à trouver l'estimation (pour $\alpha \to 0$) de l'intégrale

$$I_1 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{L_{as} \cdot S_{as}\, d\omega}{(L_{as} + \alpha\omega^{2p})^2}. \qquad (4\,;\,3{,}18)$$

Pour les équations à noyaux du Ier type l'intégrale I_1 s'écrit

$$I_1 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{S_0 \omega^{2n-2a} d\omega}{|A|^2 \left(1 + \frac{\alpha}{|A|^2}\, \omega^{2q}\right)^2}$$

et se laisse calculer de façon exacte moyennant le changement $x = \frac{\alpha}{|A|^2}\, \omega^{2q}$. Il vient

$$I_1 = \frac{1}{4q\pi^2} \frac{S_0}{|A|^2} \left(\frac{|A|^2}{\alpha}\right)^{\frac{2n-2a+1}{2q}} \frac{2p+2a-1}{2q \sin\left(\frac{2p+2a-1}{2q}\, \pi\right)}. \qquad (4\,;\,3{,}19)$$

On a donc le

Théorème 5. *Pour les équations à noyaux du* Ier *type la variance* $\sigma^2(\alpha)$ *de l'influence du bruit dans une solution régularisée se calcule par les formules* (4 ; 3,17), (4 ; 3,19) *et tend vers l'infini quand* $\alpha \to 0$.

8. Pour les équations à noyaux du IIe type on a

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\omega_0} \frac{L \cdot S\, d\omega}{(L + \alpha\omega^{2p})^2} + \frac{1}{2\pi^2} \int_{\omega_0}^\infty \frac{L_{as} \cdot S_{as}\, d\omega}{(L_{as} + \alpha\omega^{2p})^2},$$

en choisissant ω_0 comme au p. 1.

Il est évident que pour $\alpha \to 0$

$$\int_0^{\omega_0} \frac{L \cdot S\, d\omega}{(L + \alpha\omega^{2p})^2} = S_0 \cdot O(1).$$

Ainsi donc,

$$\sigma^2(\alpha) = S_0 \cdot O(1) + I_2, \qquad (4\,;\,3{,}20)$$

où

$$I_2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\omega_0}^\infty \frac{L_{as} \cdot S_{as}\, d\omega}{(L_{as} + \alpha\omega^{2p})^2}.$$

On peut récrire la fonction intégrée dans I_2 sous la forme $\omega^{-2a} F(\omega, \alpha)$. La fonction $F(\omega, \alpha)$ accuse un maximum bien net, dont la position ω_1 tend vers l'infini quand $\alpha \to 0$. Pour estimer I_2, on peut employer la méthode du col. Le nombre ω_1 s'obtient de l'équation

$\partial F(\omega, \alpha)/\partial\omega = 0$ que l'on met sous la forme

$$\alpha\omega^{2p}K_1'(\omega) - K_1'(\omega)K_1^2(\omega) - 2p\omega^{2p-1}K_1(\omega) = 0, \qquad (4;\,3{,}21)$$

avec

$$K_1(\omega) = H\exp\left[-0{,}5C_m(A\omega)^{\frac{1}{m}}\right] = \{L(\omega)\}^{1/2}.$$

Puisque, pour des ω grands, on a

$$\omega K_1'(\omega) \gg K_1(\omega),$$

on peut remplacer l'équation (4; 3,21) par l'équation

$$L(\omega) = \alpha\omega^{2p}. \qquad (4;\,3{,}22)$$

Il est facile de voir que l'unique racine positive ω_1 de cette équation vérifie la formule

$$\omega_1 = \frac{1}{A}\left(\frac{\beta_2}{C_m}\right)^m\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_2}\right)\right]. \qquad (4;\,3{,}23)$$

Appliquant la méthode du col au calcul de l'intégrale I_2, on obtient

$$I_2 = \frac{mS_0\cdot\omega_1^{1-2p-2a}}{4\sqrt{\pi^3}\,C_m\alpha\,(A\omega_1)^{\frac{1}{m}}},$$

ce qui donne, avec la formule (4; 3,23),

$$I_2 = \frac{mS_0}{4C_m\sqrt{\pi^3}}\,\frac{A^{2p+2a-1}}{\alpha}\left(\frac{C_m}{\beta_2}\right)^{2p+2a-1+\frac{1}{m}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_2}\right)\right]. \qquad (4;\,3{,}24)$$

On a donc le

Théorème 6. *Pour les équations* (4; 1,5) *à noyaux du* IIe *type la variance* $\sigma^2(\alpha)$ *de l'influence du bruit dans une solution régularisée obtenue à l'aide du stabilisateur élémentaire d'ordre p* ($M(\omega) = \omega^{2p}$) *se calcule par les formules* (4; 3,20), (4; 3,24) *et tend vers l'infini pour* $\alpha \to 0$ *comme* I_2.

9. En procédant dans le même ordre, on établit les théorèmes suivants.

Théorème 7. *Pour les équations* (4; 1,5) *à noyaux du* IIIe *type la variance* $\sigma^2(\alpha)$ *de l'influence du bruit dans une solution régularisée obtenue à l'aide du stabilisateur élémentaire d'ordre p se calcule par la formule*

$$\sigma^2(\alpha) = S_0\cdot O(1) + I_3, \qquad (4;\,3{,}25)$$

dans laquelle

$$I_3 = \frac{S_0\,(2A)^{2p+2a}}{8\sqrt{\pi^3}\cdot\alpha}\,\beta_3^{-2p-2a-1}\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_3}\right)\right]. \qquad (4;\,3{,}26)$$

Théorème 8. *Pour les équations* (4; 1,5) *à noyaux du* IVe *type la variance* $\sigma^2(\alpha)$ *de l'influence du bruit dans une solution régularisée*

obtenue à l'aide du stabilisateur élémentaire d'ordre p se calcule par la formule

$$\sigma^2(\alpha) = S_0 \cdot O(1) + I_4, \qquad (4;\ 3{,}27)$$

dans laquelle

$$I_4 = \frac{\left(1 - \frac{1}{2q}\right) S_0 A^{\frac{a}{q}}}{2q \sin\left(\frac{2p-1}{2q}\pi\right)} \left(\frac{A}{\alpha}\right)^{\frac{2n-2a+1}{2q}} \beta_4^{k\frac{2p+2a-1}{2q}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_4}\right)\right]. \qquad (4;\ 3{,}28)$$

10. Les formules (4; 3,9) à (4; 3,15) et (4; 3,17), (4; 3,19), (4; 3,20), (4; 3,24) à (4; 3,28) permettent de tirer de la condition

$$\Delta_r^2(\alpha) = \sigma^2(\alpha)$$

une valeur de α voisine de sa valeur (C, f)-optimale, que nous appellerons *presque optimale* et désignerons par $\alpha_{\text{p. o}}$. La recherche de $\alpha_{\text{p. o}}$ nécessite la connaissance de la borne supérieure exacte de $|z'_{ex}(t)|$ ou de $\left|\frac{d^{2p+1}z_{ex}}{dt^{2p+1}}\right|$.

Soit par exemple $\sup_t |z'_{ex}(t)| = B_0$. On tire alors des formules (4; 3,9) et (4; 3,19)

$$\alpha_{\text{p.o.}} = |A|^2 \left\{ \frac{S_0}{4\pi^2 B_0^2} \frac{2p+2a-1}{|A|^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2q}\right)}{\sin\left(\frac{2p+2a-1}{2q}\pi\right)} \right\}^{\frac{2q}{2n-2a+3}}.$$

R e m a r q u e 1. Si l'information dont on dispose porte sur la borne supérieure du module de la dérivée première de la solution exacte $|z'_{ex}(t)|$, il y a lieu de se servir pour la recherche de $\alpha_{\text{p.o}}$ des formules (4; 3,9), (4; 3,10), (4; 3,12), (4; 3,14) et respectivement (4; 3,19), (4; 3,24), (4; 3,26) et (4; 3,28). Si l'information porte sur le module de la dérivée d'un certain ordre $(2p_0 + 1)$, la solution sera cherchée en employant un stabilisateur d'ordre p_0, et la recherche de $\alpha_{\text{p. o}}$ devra s'effectuer en utilisant les relations tirées de la formule

$$\sigma^2(\alpha) = \Delta_r^2(\alpha),$$

ainsi que les relations (4; 3,9), (4; 3,11), (4; 3,13), (4; 3,15) et respectivement (4; 3,19), (4; 3,24), (4; 3,26), (4; 3,28).

R e m a r q u e 2. Dans [44], on trouvera, pour certains cas examinés dans ce chapitre, d'autres estimations de l'écart de la solution régularisée par rapport à celle exacte quand $M(\omega) = \omega^2$.

Dans [79], on considère les estimations asymptotiques de l'écart de la solution régularisée par rapport à celle exacte pour le cas d'une équation intégrale unidimensionnelle du type (0; 1,1) qui n'est pas une convolution.

CHAPITRE V

SUR QUELQUES OPÉRATEURS RÉGULARISANTS OPTIMAUX POUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES DU TYPE DE CONVOLUTION

1. Admettons que le second membre $u(t)$ de l'équation

$$Az \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau)\, z(\tau)\, d\tau = u(t) \qquad (5\,;\,0{,}1)$$

contient un bruit aléatoire $v(t)$ et représente donc une fonction aléatoire. Les solutions régularisées de l'équation (5; 0,1)

$$z_\alpha(t) = R_f(u, \alpha)$$

seront elles aussi des fonctions aléatoires. Nous allons estimer leur écart par rapport à la solution exacte $z_{ex}(t)$ (ou bien entre elles) dans une métrique probabilisée (ainsi qu'il a été fait au ch. IV), en posant

$$\rho_F(z_\alpha, z_{ex}) = \overline{(z_\alpha - z_{ex})^2}, \qquad (5\,;\,0{,}2)$$

la barre symbolisant l'espérance mathématique.

Après avoir défini de cette façon la métrique dans F, nous allons considérer les solutions régularisées obtenues à l'aide des facteurs stabilisants de la forme

$$f(\omega, \alpha) = \frac{L(\omega)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)}.$$

2. Dans le chapitre présent, on cherchera parmi les solutions régularisées de ce type la solution optimale au sens de la métrique (5; 0,2). Il sera montré que l'opérateur de filtration optimale au sens de Wiener est un opérateur régularisant appartenant à la classe décrite au ch. IV. Pour les équations à noyaux des types I et II (voir § 3, ch. IV), on dégagera la solution régularisée optimale dans la classe des solutions obtenues à l'aide des stabilisateurs élémentaires d'ordre p (avec $M(\omega) = \omega^{2p}$) et l'on examinera les écarts des solutions non optimales par rapport à la solution optimale [11, 14].

3. Il est à noter qu'en cherchant la solution de l'équation $Az = u$ par rapport à la fonction z ne dépendant que d'une variable, t, on peut se trouver dans deux cas différents, c'est-à-dire que le problème peut se poser de deux façons.

Dans le problème du premier type, la fonction $u = u_{ex}(t)$ est une fonction déterminée; on cherche donc une solution déterminée $z_{ex}(t)$. Si l'on ne connaît pas la fonction $u_{ex}(t)$ mais son δ-approximation $u(t) = u_{ex}(t) + v(t)$ telle que $\rho_U(u, u_{ex}) \leqslant \delta$, on ne peut chercher qu'une solution approchant $z_{ex}(t)$. Le bruit $v(t)$ est généralement une fonction aléatoire.

Dans le problème du second type, $u_{ex}(t)$ est une réalisation d'un processus aléatoire; il s'agit de trouver une réalisation d'un autre processus aléatoire, $z_{ex}(t)$, lié au premier par la relation $Az_{ex} = u_{ex}$. Si au lieu de $u_{ex}(t)$ on a $u(t) = u_{ex}(t) + v(t)$, où $v(t)$ est un bruit aléatoire, on cherche une « solution » voisine de $z_{ex}(t)$.

La résolution d'un tel problème est basée essentiellement sur l'exploitation d'une information supplémentaire relative à la solution cherchée et au bruit. Nous allons distinguer les cas où sont connues

a) les densités spectrales de la solution et du bruit;

b) les lois de distribution des probabilités de la solution et du bruit.

Dans le chapitre présent, la solution régularisée optimale au sens défini ci-dessus et les estimations de l'écart de la solution régularisée non optimale par rapport à celle optimale seront cherchées relativement aux problèmes du second type, avec l'exploitation de l'information connue *a priori* du type a). On fait l'hypothèse que $v(t)$ et la solution cherchée sont des réalisations de processus aléatoires non corrélés. Par $S(\omega)$ et $N(\omega)$ sont désignées les densités spectrales respectives des deux processus.

Nous indiquerons une méthode de recherche approchée des représentations asymptotiques des fonctions $S(\omega)$ et $N(\omega)$ pour $\omega \to \infty$.

Les cas d'exploitation de l'information supplémentaire du type b) sont étudiés dans les travaux [179 à 181].

§ 1. Solution régularisée optimale. Lien de la méthode de régularisation avec la filtration optimale au sens de Wiener

1. Soit $z_{ex}(t)$ la solution exacte de l'équation (5; 0,1) à second membre $u = u_{ex}(t)$, c'est-à-dire que $Az_{ex} \equiv u_{ex}(t)$. Nous admettons que $u(t) = u_{ex}(t) + v(t)$. Nous allons examiner les solutions régularisées de l'équation (5; 0,1) de la forme

$$z_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(-\omega)\, u(\omega)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)} \exp(-i\omega t)\, d\omega = R_M(u, \alpha), \qquad (5;1,1)$$

où la fonction $\frac{K(-\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)}$ appartient à $L_2(-\infty, \infty)$ pour tout $\alpha > 0$. L'opérateur $R_M(u, \alpha)$ se trouve défini par la donnée de la fonction $M(\omega)$. On peut le mettre sous la forme d'une convolution

$$R_M(u, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} L_\alpha(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau,$$

où

$$L_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(-\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)} \exp(-i\omega t)\, d\omega.$$

2. Parmi les opérateurs de ce type, on peut trouver un opérateur $R_{M_0}(u, \alpha)$ tel qu'il minimise la quantité $\overline{[z_\alpha(t) - z_{ex}(t)]^2}$. En effet, il est évident que

$$z_\alpha(t) - z_{ex}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{K(-\omega)\, u(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)} - z_{ex}(\omega) \right\} \exp(-i\omega t)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{K(-\omega)\,[u_{ex}(\omega)+v(\omega)]}{L(\omega)+\alpha M(\omega)} - z_{ex}(\omega) \right\} \exp(-i\omega t)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{L(\omega)\, z_{ex}(\omega) + K(-\omega)\, v(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)} - z_{ex}(\omega) \right\} \exp(-i\omega t)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{-\alpha M(\omega)\, z_{ex}(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)} + \frac{K(-\omega)\, v(\omega)}{L(\omega)+\omega M(\omega)} \right\} \exp(-i\omega t)\, d\omega,$$

car $u_{ex}(\omega) = K(\omega)\, z_{ex}(\omega)$. Aussi

$$\overline{[z_\alpha(t) - z_{ex}(t)]^2} =$$

$$= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\alpha M(\omega)\, z_{ex}(\omega) + K(-\omega)\, v(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)} \exp(-i\omega t)\, d\omega \times}$$

$$\overline{\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\alpha M(\omega')\, z_{ex}(\omega') + K(-\omega')\, v(\omega')}{L(\omega')+\alpha M(\omega')} \exp(-i\omega' t)\, d\omega'} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 M(\omega)\, M(\omega')\, \overline{z_{ex}(\omega)\, z_{ex}(\omega')} + K(-\omega)\, K(-\omega')\, \overline{v(\omega)\, v(\omega')}}{[L(\omega)+\alpha M(\omega)]\,[L(\omega')+\alpha M(\omega')]} \times$$

$$\times \exp[-i(\omega+\omega')\, t]\, d\omega\, d\omega',$$

parce que $\overline{v(\omega)} = \overline{v(\omega')} = 0$. Pour les processus aléatoires stationnaires on a $\overline{z_{ex}(\omega) \cdot z_{ex}(\omega')} = N(\omega)\,\delta(\omega + \omega')$ et $\overline{v(\omega)\,v(\omega')} = S(\omega)\,\delta(\omega + \omega')$, où $\delta(\omega + \omega')$ est la fonction delta de Dirac. En intégrant dans la dernière intégrale double par rapport à la variable ω' et en appliquant la propriété de la fonction de Dirac et la parité des fonctions $M(\omega)$ et $L(\omega)$, nous obtenons la valeur de l'écart

$$\overline{[z_\alpha(t) - z_{ex}(t)]^2} = T(\alpha M),$$

$$T(\alpha M) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 M^2(\omega)\,N(\omega) + L(\omega)\,S(\omega)}{[L(\omega) + \alpha M(\omega)]^2}\,d\omega. \qquad (5\,;\,1{,}2)$$

Etant donné que cette fonctionnelle doit passer par le minimum sur une des fonctions $M(\omega)$, on trouve par des calculs élémentaires que le minimum a lieu sur la fonction

$$M(\omega) = M_0(\omega) = \frac{1}{\alpha}\frac{S(\omega)}{N(\omega)} \quad \text{et}$$

$$\min_{\{M(\omega)\}} \overline{[z_\alpha(t) - z_{ex}(t)]^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega) + L(\omega)\,N(\omega)\,S(\omega)}{N(\omega)\,[L(\omega) + \alpha M_0(\omega)]^2}\,d\omega.$$

Ainsi donc, l'opérateur $R_M(u, \alpha)$ de la forme (5; 1,1), minimisant l'écart (5; 0,2) de la solution régularisée $z_\alpha(t)$ par rapport à celle exacte $z_{ex}(t)$ et répondant à la fonction

$$M(\omega) = M_0(\omega) = \frac{1}{\alpha}\frac{S(\omega)}{N(\omega)},$$

ne dépend pas de α et se présente comme suit:

$$R_{M_0}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(-\omega)\,u(\omega)}{L(\omega) + \frac{S(\omega)}{N(\omega)}} \exp(-i\omega t)\,d\omega. \qquad (5\,;\,1{,}3)$$

La solution approchée (régularisée) de l'équation (5; 0,1) $z_{opt}(t)$, obtenue à l'aide de cet opérateur, ne dépend pas du paramètre α et a pour formule

$$z_{opt}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(-\omega)\,u(\omega)}{L(\omega) + \frac{S(\omega)}{N(\omega)}} \exp(-i\omega t)\,d\omega. \qquad (5\,;\,1{,}4)$$

Elle sera appelée *solution régularisée optimale* de (5; 0,1). Elle coïncide avec le résultat qu'on obtient par l'emploi de la filtration optimale au sens de Wiener pour la recherche de $z(t)$ si le second membre se présente comme $u(t) = u_{ex}(t) + v(t)$ [220]. Pour cette raison, l'opérateur $R_{M_0}(u)$ sera appelé aussi *opérateur de filtration optimale* au sens de Wiener.

R e m a r q u e. La recherche de la solution régularisée optimale nécessite la connaissance des densités spectrales du bruit et de la solution cherchée. Dans les problèmes pratiques aboutissant à l'équation (5; 0,1), on dispose souvent d'une information permettant de trouver $S(\omega)$ (du moins approximativement). En ce qui concerne la densité spectrale de la solution $N(\omega)$, on fait généralement des hypothèses dont la validité est à établir au cours de la résolution du problème. Au § 3 de ce chapitre, on envisage une méthode de recherche approchée des représentations asymptotiques des fonctions $S(\omega)$ et $N(\omega)$ pour $\omega \to \infty$ dans l'hypothèse de l'ergodicité des processus aléatoires.

3. La formule (5; 1,1) définit des familles (classes) monoparamétriques d'opérateurs régularisants linéaires. Chacune de ces familles se définit par la donnée d'une fonction $M(\omega)$ vérifiant les conditions a), b), c), d) énumérées au § 1, ch. IV. Nous venons donc de démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. *Parmi les fonctions* $M(\omega)$ *ayant les propriétés* a) à d) du § 1, ch. IV, *on trouve une fonction* $M_0(\omega)$ *telle que la famille monoparamétrique d'opérateurs régularisants* $R_{M_0}(u, \alpha)$ *contienne l'opérateur de filtration optimale au sens de Wiener.*

L'importance du théorème 1 consiste premièrement en ce que l'opérateur de filtration optimale est inclus dans une famille d'opérateurs stables qui dépendent de façon continue du second membre $u(t)$ de l'équation (5; 0,1). Donc l'opérateur de filtration optimale est stable, c'est-à-dire continu par rapport à u sur n'importe quel second membre exact fixé. Deuxièmement, de ce théorème et du § 3, ch. IV, on déduit qu'à de faibles écarts de la fonction $M(\omega)$ par rapport à la fonction $S(\omega)/N(\omega)$ (au sens du ε-voisinage asymptotique des facteurs $f(\omega, \alpha)$ correspondants) répondent de faibles écarts de la solution régularisée par rapport à celle optimale. Cela permet de chercher les solutions approchées de (5; 0,1) voisines de celle optimale en utilisant des algorithmes plus simples de construction de la solution régularisée.

Dans bien des cas, on arrive à calculer la densité spectrale du bruit $S(\omega)$ (en général, de façon approchée) en utilisant l'information sur le bruit; par contre, la densité spectrale de la solution cherchée $N(\omega)$ est inconnue. Il est donc impossible, en règle générale, de construire une solution approchée au moyen de l'opérateur de filtration optimale. Pour cette raison il y a intérêt à chercher la possibilité de substituer à l'opérateur régularisant optimal (opérateur de filtration optimale) un opérateur « voisin » que l'on construit sur la base d'une information moins riche connue *a priori*. On montrera au § 3 de ce chapitre la possibilité de trouver avec toute précision voulue les représentations asymptotiques des fonctions $S(\omega)$ et

$N(\omega)$ d'après la famille de solutions régularisées des équations du Ier et du IIe type, dans l'hypothèse de l'ergodicité des processus aléatoires stationnaires envisagés. On utilisera pour cela les opérateurs régularisants élémentaires d'ordre p (avec $M(\omega) = \omega^{2p}$).

4. Si $M(\omega) = \omega^{2p}$ (p n'est pas supposé entier, $p \geqslant 0$), alors $T(\alpha M)$ sera fonction des paramètres α et p. Désignons-la par $T(\alpha, p)$.

En posant dans la formule (5; 1,2) $M(\omega) = \omega^{2p}$, on trouve

$$T(\alpha, p) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{L\cdot S\cdot d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} + \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\alpha^2\omega^{4p}N\cdot d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}. \qquad (5;\ 1,5)$$

Quel que soit $p > 0$, la deuxième intégrale dans (5; 1,5)

$$\Delta^2(\alpha) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\alpha^2\omega^{4p}\cdot N\cdot d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}$$

tend monotonement vers zéro pour $\alpha \to 0$ *), alors que l'intégrale

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{L\cdot S\cdot d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}$$

croît monotonement.

En outre, $\Delta^2(\infty) = \infty$ et $\sigma^2(\infty) = 0$. Aussi, pour toute valeur fixée de p, la fonction

$$T(\alpha, p) = \sigma^2(\alpha) + \Delta^2(\alpha)$$

admet-elle un minimum pour une certaine valeur de $\alpha = \alpha_{p\text{-opt}}$ **) que nous appellerons valeur *p-optimale* du paramètre de régularisation α. Elle se définit de la condition $\partial T/\partial\alpha = 0$ qui est en l'occurrence de la forme

$$\int_0^\infty \frac{\alpha\cdot L\cdot N\cdot\omega^{4p}}{(L+\alpha\omega^{2p})^3}\,d\omega = \int_0^\infty \frac{S\cdot L\cdot\omega^{2p}\,d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^3}. \qquad (5;\ 1,6)$$

Il est évident que $\alpha_{p\text{-opt}}$ est fonction de p, $\alpha_{p\text{-opt}} = \alpha(p)$. Donc,

$$T(\alpha_{p\text{-opt}}, p) = \psi(p). \qquad (5;\ 1,7)$$

5. Examinons certaines propriétés de la fonction $\psi(p)$ pour les équations à noyaux $K(t)$ dont les transformées de Fourier sur l'axe réel pour $\omega \to \infty$ admettent la représentation asymptotique de l'un des quatre types suivants:

1) $K(\omega) = \frac{A}{\omega^n}$, $\quad n > 0 \quad$ (Ier type);

---

*) La démonstration en est la même que pour $\Delta_r(t, \alpha)$ au chapitre IV.

**) Si cette valeur n'est pas unique, on retient la plus petite.

2) $K(\omega)=H\omega^{\nu}\exp\left(-(i\omega A)^{\frac{1}{m}}\right)$, $A>0$, $\nu\geqslant 0$, $H>0$, $m>0$ (IIᵉ type);

3) $K(\omega)=H\exp(-A\omega^2)$, $A>0$, $H>0$ (IIIᵉ type);

4) $K(\omega)=\dfrac{A}{\omega^n\underbrace{(\ln\ln\ldots\ln\omega)^k}_{s \text{ fois}}}$, $n\geqslant 0$, $k\geqslant 0$, $n+k\neq 0$ (IVᵉ type).

Il sera supposé en outre que les densités spectrales $N(\omega)$ et $S(\omega)$ admettent *sur l'axe réel*, pour $\omega\to\infty$, les représentations asymptotiques de la forme

$$N(\omega)=\frac{N_0}{\omega^{2b}},\quad b>0;\qquad S(\omega)=\frac{S_0}{\omega^{2a}},\quad a\geqslant 0.$$

Considérons les estimations asymptotiques des intégrales

$$\Delta^2(\alpha)=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{\alpha^2\omega^{4p}N\,d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}\quad\text{et}\quad\sigma^2(\alpha)=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{S\cdot L\,d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}.$$

§ 2. Propriétés de la fonction $\psi(p)$ pour les équations à noyaux des types I à IV

1. Noyaux du Iᵉʳ type. Reprenant les raisonnements du § 3, ch. IV, on trouve

$$\Delta^2(\alpha)=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{\alpha^2\omega^{4p}N_{\text{as}}\,d\omega}{(L_{\text{as}}+\alpha\omega^{2p})^2}+O(\alpha^2),$$

$$\sigma^2(\alpha)=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{S_{\text{as}}L_{\text{as}}\,d\omega}{(L_{\text{as}}+\alpha\omega^{2p})^2}+O(S_0),$$

les symboles f_{as} signifiant comme auparavant que $f(\omega)$ se calcule pour tous les ω par des formules asymptotiques. On écrit donc

$$\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{\alpha^2\omega^{4p}N_{\text{as}}}{(L_{\text{as}}+\alpha\omega^{2p})^2}=\frac{N_0}{2\pi^2|A|^4}\int\limits_0^\infty\frac{\alpha^2\omega^{4p-2b}\,d\omega}{\left(1+\dfrac{\alpha}{|A|^2}\omega^{2q}\right)^2},\qquad q=p+n.$$

Cette intégrale se calcule par substitution $x=\dfrac{\alpha}{|A|^2}\omega^{2q}$ *). En procédant ainsi, on trouve

$$\Delta^2(\alpha)=\frac{N_0}{2\pi q}(1-\gamma)\frac{1}{\sin\gamma\pi}\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\gamma}+O(\alpha^2),\tag{5; 2,1}$$

*) I. Ryjik, I. Gradstein — *Tables des intégrales, sommes, séries et produits.* 4ᵉ édition (en russe). Moscou, 1962, p. 307.

où

$$\gamma = \frac{2b-1}{2q}.$$

Le calcul de $\sigma^2(\alpha)$ est analogue:

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{S_0}{4\pi q\,|A|^2}(1-\mu)\frac{1}{\sin\mu\pi}\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{-\mu} + O(S_0), \qquad (5;\,2{,}2)$$

où

$$\mu = \frac{2n-2a+1}{2q}.$$

Donc, lorsque $\alpha \to 0$, on a pour les noyaux du Ier type

$$T(\alpha, p) = C_1\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\gamma} + C_2\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{-\mu} S_0 + O(\alpha^2) + O(S_0), \qquad (5;\,2{,}3)$$

où

$$C_1 = \frac{N_0}{4\pi q}\frac{1-\gamma}{\sin\gamma\pi}; \quad C_2 = \frac{1}{4\pi q\,|A|^2}\frac{1-\mu}{\sin\mu\pi}.$$

Soient quatre nombres non négatifs p, n, b, a vérifiant les conditions

$$0 < \gamma < 1, \quad 0 < \mu < 1 \quad \text{et} \quad b \geqslant 2a \qquad (5;\,2{,}4)$$

qui impliquent les relations
1) $2b > 1$; $2b < 2n + 2p + 1$;
2) $2a < 2n + 1$; $2p > 1 - 2a$.

Il découle de ces exigences, en particulier, que dans le cas du bruit « blanc » ($a = 0$) on doit employer un algorithme régularisant d'ordre $p > {}^1/_2$.

Les quantités b et n caractérisent le degré de régularité de la solution cherchée et du noyau $K(t)$. Comme le montre l'inégalité $2b < 2n + 2p + 1$, dans le cas où $n < b$, on ne peut pas choisir l'ordre de régularisation p de façon arbitraire. Signalons que p, n, b, a ne sont pas nécessairement des entiers.

Utilisant la formule (5; 2,3) et ne retenant que les termes principaux, on tire de la condition $\partial T/\partial\alpha = 0$ la valeur p-optimale de α *):

$$\alpha_{p\text{-opt}} = |A|^2\left(\frac{\mu}{\gamma}\frac{C_2}{C_1}S_0\right)^{\frac{1}{\gamma+\mu}}, \qquad (5;\,2{,}5)$$

ou encore

$$\alpha_{p\text{-opt}} = |A|^2\left(\frac{S_0}{N_0\,|A|^2}\frac{\mu}{\gamma}\frac{1-\mu}{1-\gamma}\frac{\sin\gamma\pi}{\sin\mu\pi}\right)^{\frac{1}{\gamma+\mu}}. \qquad (5;\,2{,}6)$$

*) On obtient la même valeur de α à partir de l'équation (5; 1,6), en calculant les intégrales dans celle-ci avec la même substitution $x = \frac{\alpha}{|A|^2}\omega^{2q}$.

Portant cette valeur $\alpha_{p\text{-opt}}$ dans la formule (5; 2,3), on trouve

$$\psi(p)=T(\alpha_{p\text{-opt}}, p)=\left(\frac{\mu}{\gamma}\frac{C_2}{C_1}S_0\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+\mu}}\cdot\left(1+\frac{\gamma}{\mu}\right)C_1, \qquad (5;2,7)$$

ou

$$\psi(p)=\left(1+\frac{\gamma}{\mu}\right)\frac{N_0}{4q\pi}\frac{1-\gamma}{\sin\gamma\pi}\left\{\frac{\mu(1-\mu)}{\gamma(1-\gamma)}\frac{\sin\gamma\pi}{\sin\mu\pi}\frac{S_0}{N_0|A|^2}\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma+\mu}}. \qquad (5;2,8)$$

Il est évident que $\gamma=\gamma(p)$, $\mu=\mu(p)$. La valeur $\psi(p)$ est la *minimale* des valeurs moyennes possibles (pour différentes valeurs du paramètre de régularisation α) du carré de l'écart de la solution régularisée $z_\alpha(t)$ par rapport à la solution exacte $z_{ex}(t)$ pour une régularisation élémentaire d'ordre p. Comment varie ce minimum d'écart avec la variation de p? La réponse est fournie par le

Théorème 2. *Pour les noyaux du* Ier *type, la fonction* $\psi(p)$ *possède les propriétés suivantes:*

1) *elle a un minimum unique pour* $p=p_0=b-a$;

2) *elle croît monotonement dans le domaine de* $p>p_0$ *et, lorsque* $p\to\infty$, *tend vers une limite finie* $\psi(\infty)$ *égale à*

$$\psi(\infty)=\psi(p_0)\frac{\sin(\gamma_0\pi)}{\pi\gamma_0(1-\gamma_0)}; \qquad (5;2,9)$$

3) $$\frac{\psi''(p_0)}{\psi(p_0)}=\frac{y(1-y)}{(2b-1)^2}\left\{\frac{\pi^2y^2}{\sin^2(\pi y)}-1-\frac{y^2}{(1-y)^2}\right\}, \qquad (5;2,10)$$

où

$$y=\frac{\gamma_0}{\mu_0},\quad \gamma_0=\gamma(p_0),\quad \mu_0=\mu(p_0).$$

D é m o n s t r a t i o n. Par calcul de la dérivée logarithmique de la fonction $\psi(p)$, on trouve

$$\psi'(p)=\psi(p)\frac{\gamma\mu}{q(\gamma+\mu)}\cdot\varphi(\gamma,\mu),$$

où

$$\varphi(\gamma,\mu)=\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{1-\mu}-\frac{1}{\mu}+\pi\frac{\sin[\pi(\gamma+\mu)]}{\sin(\gamma\pi)\cdot\sin(\mu\pi)}.$$

Puisque γ et μ vérifient les conditions $0<\gamma<1$, $0<\mu<1$, la fonction $\psi(p)$ est positive pour toute valeur de p. La fonction $\varphi(\gamma,\mu)$ assujettie aux contraintes mentionnées sur γ et μ ne s'annule que pour $\gamma(p)+\mu(p)=1$, c'est-à-dire pour $p=p_0=b-a$.

La propriété 1) est démontrée.

Dans le domaine des $p>p_0$ la fonction $\varphi(\gamma,\mu)$ reste positive. Par conséquent, $\psi(p)$ croît monotonement dans ce domaine.

Utilisant la formule (5; 2,8), on trouve directement par passage à la limite

$$\psi(\infty)=\frac{1}{\mu_0}\frac{N_0}{2\pi^2(2b-1)}\left\{\frac{S_0}{N_0|A|^2}\right\}^{\gamma_0}.$$

D'autre part,

$$\psi(p_0)=\frac{\gamma_0(1-\gamma_0)}{2\pi\sin(\pi\gamma_0)}\left\{\frac{S_0}{N_0|A|^2}\right\}^{\gamma_0}\frac{N_0}{\mu_0(2b-1)}.$$

Ces formules impliquent (5; 2,9).

La propriété 3) s'établit par calcul direct au départ de la formule (5; 2,8).

C o r o l l a i r e 1. *Pour tout* $p > p_0$ *est vérifiée l'inégalité*

$$0<\frac{\psi(p)-\psi(p_0)}{\psi(p_0)}<\frac{\gamma_0}{1-\gamma_0}.$$

Ainsi donc, l'écart quadratique minimal $\psi(p)$ que donne une régularisation d'un ordre arbitraire $p > p_0$ s'avère peu différent de l'écart quadratique minimal $\psi(p_0)$ correspondant à la *régularisation d'ordre optimal* p_0. Donc, *pour des valeurs suffisamment petites de* γ_0, *il est loisible de procéder à la régularisation d'un ordre arbitraire et assez grand* $p > p_0$. Notons que le paramètre de régularisation α doit être pris dans ce cas égal à $\alpha_{p\text{-opt}}$.

On dit que l'opérateur

$$Az\equiv\int_{-\infty}^{\infty}K(t-\tau)z(\tau)\,d\tau$$

est *fortement lissant* [10, 11] si n est sensiblement supérieur à b et à a, c'est-à-dire que $n \gg \max\{b;\, a\}$.

C o r o l l a i r e 2. *Pour un opérateur* Az *fortement lissant, le minimum de la valeur moyenne de l'écart quadratique de la solution régularisée par rapport à celle exacte, c'est-à-dire la fonction* $\psi(p)$, *est peu dépendant de l'ordre de régularisation* p.

En effet, dans le cas considéré la quantité

$$\gamma_0=\frac{2b-1}{2n+2b-2a}$$

est petite.

Le stabilisateur élémentaire d'ordre p_0 sera appelé le *meilleur stabilisateur élémentaire*. On conçoit donc que pour un opérateur Az fortement lissant, on peut employer dans la pratique des calculs un stabilisateur élémentaire d'un ordre p quelconque suffisamment élevé ($p > p_0$), et non nécessairement le meilleur.

Remarque 1. On peut aussi estimer la relation $\frac{\psi(p)-\psi(p_0)}{\psi(p_0)}$ en faisant jouer la propriété 3) de la fonction $\psi(p)$ du théorème 2. On a

$$\frac{\psi(p)-\psi(p_0)}{\psi_0(p_0)} \approx \frac{(p-p_0)^2}{2}\,\frac{y(1-y)}{(2b-1)^2}\left\{\frac{\pi^2 y^2}{\sin^2(\pi y)}-1-\frac{y^2}{(1-y)^2}\right\}.$$

La valeur de $\alpha = \alpha_{p\text{-opt}}(p)$ répondant à une régularisation d'ordre $p = p_0$ sera dite valeur *optimale* du paramètre de régularisation et sera notée

$$\alpha_{\text{opt}} = \alpha_{p\text{-opt}}(p_0).$$

Il est évident que pour les équations à noyaux du Ier type

$$\alpha_{\text{opt}} = S_0/N_0.$$

La solution régularisée $z_{\text{opt}}(t)$ trouvée par une régularisation d'ordre $p = p_0$, pour $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$, coïncide avec la fonction $z_{\text{f.o.}}(t)$ obtenue par filtration optimale au sens de Wiener:

$$z_{\text{opt}}(t) \equiv z_{\text{f.o.}}(t).$$

Remarque 2. Il résulte des formules (5; 2,1) et (5; 2,2) qu'on a pour $p = p_0$ et $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$

$$\frac{\sigma^2(\alpha_{\text{opt}})}{\Delta^2(\alpha_{\text{opt}})} = \frac{2b-1}{2n-2a+1} = y.$$

Ainsi donc, *pour des opérateurs fortement lissants* ($n \gg a$; b), *à l'utilisation d'une régularisation d'ordre optimal* p_0 *à paramètre de régularisation optimal* ($\alpha = \alpha_{\text{opt}}$), *l'écart* $T(\alpha_{\text{opt}}, p_0)$ *est dû principalement à la régularisation et non pas au bruit.*

2. Noyaux du IIe et du IIIe type. En s'appuyant sur les considérations exposées au début du p. 1, on peut remplacer l'équation (5; 1,6) servant à déterminer $\alpha_{p\text{-opt}}$ par l'équation

$$\alpha N_0 \int_0^\infty \frac{\omega^{4p-2b} L_{\text{as}}(\omega)\, d\omega}{\{L_{\text{as}}(\omega)+\alpha\omega^{2p}\}^3} = S_0 \int_0^\infty \frac{\omega^{2p-2a} L_{\text{as}}(\omega)\, d\omega}{\{L_{\text{as}}(\omega)+\alpha\omega^{2p}\}^3}. \qquad (5;\, 2{,}11)$$

En calculant l'intégrale

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\omega^{2p-2a} L_{\text{as}}}{(L_{\text{as}}+\alpha\omega^{2p})^3}\, d\omega$$

par la méthode du col, on trouve

$$I_1 = \frac{\omega_1^{2p-2a} L_{\text{as}}(\omega_1)}{\{L_{\text{as}}(\omega_1)+\alpha\omega_1^{2p}\}^3}\left[\sqrt{\frac{\pi}{|f_1''(\omega_1, \alpha)|}} + O\left(\alpha^{\frac{3}{2}}\right)\right],$$

où

$$f_1(\omega, \alpha) = \alpha \ln \frac{\omega^{2p-2a} L_{as}(\omega)}{\{L_{as}(\omega) + \alpha\omega^{2p}\}^3},$$

$f_1''(\omega, \alpha)$ est la dérivée seconde par rapport à ω. Ici ω_1 est racine de l'équation

$$(-2L_{as} + \alpha\omega^{2p}) \frac{dL_{as}}{d\omega} - \frac{4p+2a}{\omega} \alpha \cdot \omega^{2p} \cdot L_{as} + \frac{2p-2a}{\omega} L_{as}^2 = 0.$$

Il est évident que $\omega_1 = \omega_1(\alpha)$ et $\omega_1(\alpha) \to \infty$ pour $\alpha \to 0$. Vu que

$$\frac{\omega^{4p-2b} L_{as}(\omega)}{\{L_{as}(\omega) + \alpha\omega^{2p}\}^3} = \omega^{2p-2b+2a} \exp\left[\frac{1}{\alpha} f_1(\omega, \alpha)\right],$$

l'intégrale

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\omega^{4p-2b} L_{as}\, d\omega}{(L_{as} + \alpha\omega^{2p})^3}$$

se calcule elle aussi par la méthode du col; on obtient

$$I_2 = \frac{\omega_1^{2p-2a} L_{as}(\omega_1)}{\{L_{as}(\omega_1) + \alpha\omega_1^{2p}\}^3} \left[\sqrt{\frac{\pi}{|f_1''(\omega_1, \alpha)|}}\, \omega_1^{2p-2b+2a} + O\left(\alpha^{\frac{3}{2}}\right)\right].$$

Portant les valeurs de I_1 et de I_2 dans la formule (5; 2,11) et ne retenant que les termes essentiels, on aboutit à l'équation suivante pour la détermination de $\alpha_{p\text{-opt}}$:

$$\alpha = \frac{S_0}{N_0} \{\omega_1(\alpha)\}^{-2p-2b+2a}.$$

Pour $p = p_0$ on a $\alpha_{opt} = S_0/N_0$.

On a vu au p. 1 que plus n est grand, c'est-à-dire plus l'ordre de décroissance de $K(\omega)$ est élevé pour $\omega \to \infty$, moins grande est la différence $\psi(p) - \psi(p_0)$ pour $p > p_0$, donc moins prononcée est l'influence exercée par l'ordre de régularisation p sur la fonction $\psi(p)$ et, partant, plus légitime est de remplacer l'ordre de régularisation optimal p_0 par un ordre quelconque $p > p_0$.

Dans le cas des équations à noyaux du IIe et du IIIe type, la fonction $K(\omega)$ a pour $\omega \to \infty$ un ordre de décroissance plus élevé que n'importe quelle puissance d'exposant négatif ω^{-n}. Aussi peut-on considérer l'opérateur Az à noyaux du IIe ou du IIIe type comme fortement lissant. Par conséquent, à cet opérateur s'applique le corollaire 2 du théorème 2 de ce paragraphe.

Dans le cas des équations à noyaux du IVe type, c'est l'exposant de puissance n qui joue le rôle prépondérant, et non les quantités s et k. Nous omettrons de donner ici les calculs correspondants que le lecteur trouvera dans [13].

Remarque 3. Les résultats analogues à ceux des §§ 1 et 2 restent vrais aussi pour des équations intégrales multidimensionnelles de première espèce du type de convolution (voir [144, 145]).

§ 3. Détermination des caractéristiques H. F. du signal et du bruit et de la valeur optimale du paramètre de régularisation

1. Revenons au problème de recherche de l'ordre de régularisation optimal p_0 et de la valeur optimale du paramètre de régularisation α_{opt}. Comme nous l'avons montré pour les équations du Ier type, $p_0 = b - a$ et $\alpha_{opt} = S_0/N_0$. Donc, pour trouver p_0 et α_{opt} (et aussi $\alpha_{p\text{-}opt}$, la valeur p-optimale de α), il faut connaître les caractéristiques H. F. *) du signal et du bruit: N_0, b, S_0, a. Dans un grand nombre de problèmes pratiques, il est possible de déterminer approximativement les caractéristiques du bruit S_0 et a d'après les résultats d'observations. Il en est autrement pour les caractéristiques H. F. du signal N_0 et b. Notre hypothèse sur le caractère de la dépendance fonctionnelle de la densité spectrale $N(\omega)$ du signal se vérifie pour de nombreux problèmes. Or, le plus souvent, les quantités N_0 et b déterminant cette dépendance pour des valeurs élevées de ω restent inconnues et ne se laissent pas déterminer directement d'après les résultats d'observations.

2. Nous montrerons dans ce paragraphe qu'il est possible de déterminer ces paramètres de façon unique d'après une famille de solutions régularisées $\{z_\alpha(t)\}$ répondant aux différentes valeurs de α et construites à l'aide de l'opérateur régularisant élémentaire $M(\omega) = \omega^{2p}$ dont l'ordre p peut être choisi d'une façon assez arbitraire. Le problème s'avère être particulièrement simple dans le cas de *processus ergodiques* [11].

Ainsi donc, appliquée à des processus ergodiques, la méthode de régularisation permet de rechercher la solution approchée optimale (ou voisine de celle-ci) de l'équation (5; 0,1) en utilisant une information sensiblement moindre sur la solution cherchée et le bruit que celle qu'exige la méthode de filtration optimale.

3. Introduisons une fonction du paramètre α:

$$F(\alpha) = \alpha^{\frac{-2n}{n+p}} \int_{-\infty}^{\infty} \{A^* [u(t) - Az_\alpha(t)]\}^2 \, dt,$$

où A^* est l'opérateur adjoint de A dans L_2. Il est évident que $F(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha > 0$.

Considérons les équations à noyaux du Ier type.

---

*) H. F. est l'abréviation pour « haute fréquence ».

Théorème. *Les bruits étant faibles (donc, S_0 petit), la fonction $F(\alpha)$ admet un minimum local dans un point $\alpha = \alpha_{\min}$ et un maximum local dans un autre point $\alpha = \alpha_{\max}$, et ceci avec $\alpha_{\max} < \alpha_{\min}$.*

Démonstration. Utilisant le théorème de Plancherel et l'expression de la densité spectrale $U(\omega)$ du second membre de l'équation (5; 0,1)

$$U(\omega) = L(\omega)\, N(\omega) + S(\omega),$$

on trouve

$$F(\alpha) = \alpha^{\frac{2p}{q}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(LN+S)\,\omega^{4p}\,d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}$$

ou

$$F(\alpha) = 2\alpha^{\frac{2p}{q}} \left\{ \int_0^{\omega_0} \frac{L(LN+S)\,\omega^{4p}}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}\,d\omega + \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{L(LN+S)\,\omega^{4p}}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}\,d\omega \right\}.$$

On choisira le nombre ω_0 de façon à permettre de calculer les fonctions $L(\omega)$, $N(\omega)$, $S(\omega)$, pour $\omega > \omega_0$, par les formules asymptotiques.

Pour des α faibles

$$\int_0^{\omega_0} \frac{L^2 N \omega^{4p}\,d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} = B_1 \int_0^{\omega_0} N\omega^{4p}\,d\omega = O(1), \text{ où } 0{,}25 < B_1 < 1;$$

$$\int_0^{\omega_0} \frac{LS\omega^{4p}\,d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} = B_2 \int_0^{\omega_0} S\cdot L^{-1}\omega^{4p}\,d\omega = O(1), \text{ où } 0{,}25 < B_2 < 1;$$

$$I_1 = \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{L^2 N\omega^{4p}\,d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} = N_0 \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\omega^{4p-2b}\,d\omega}{\left(1+\frac{\alpha}{|A|^2}\,\omega^{2q}\right)^2} =$$

$$= \frac{N_0}{2q} \int_{x_0}^{\infty} \frac{x^{\frac{4p-2b+1}{2q}-1}\,dx}{(1+x)^2} \cdot \left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\frac{-4p+2b-1}{2q}},$$

où $x_0 = \frac{\alpha}{|A|^2}\,\omega_0^{2q}$.

Lorsque $\alpha \to 0$, la dernière intégrale tend vers une intégrale, comprise entre 0 et ∞, facile à calculer et égale à

$$\pi\,\frac{2p-2n-2b+1}{2q}\,\frac{1}{\sin\left(\frac{4n+2b-1}{2q}\,\pi\right)}.$$

Ainsi,

$$I_1 = C_1(\alpha)\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\frac{-4p+2b-1}{2q}},$$

avec

$$C_1(\alpha)\to C_{10}=\frac{\pi N_0}{(2q)^2}\,\frac{2p-2n-2b+1}{\sin\left(\frac{4n+2b-1}{2q}\pi\right)}\quad\text{pour}\quad \alpha\to 0.$$

On trouve de façon analogue que

$$I_2=\int_{\omega_0}^{\infty}\frac{LS\omega^{4p}\,d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}=C_2(\alpha)\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\frac{-4p+2n-2a+1}{2q}}\cdot\frac{S_0}{|A|^2},$$

où

$$C_2(\alpha)\to C_{20}=\frac{\pi}{(2q)^2}\,\frac{2p-2a+1}{\sin\left(\frac{2p-2a+1}{2q}\pi\right)}\quad\text{pour}\quad \alpha\to 0.$$

Donc, pour des α faibles, on a

$$F(\alpha)=C_3(\alpha)\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\gamma}+C_4(\alpha)\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{-\mu}\cdot\frac{S_0}{|A|^2}+O\left(\alpha^{\frac{2p}{q}}\right),\qquad (5\,;3{,}1)$$

où

$$C_3(\alpha)=2C_1(\alpha)\,|A|^{\frac{-4p}{q}},\quad C_4(\alpha)=2C_2(\alpha)\,|A|^{\frac{-4p}{q}}.$$

Etant donné que $\gamma>0$ et $\mu>0$, on a $F(\alpha)\to\infty$ quand $\alpha\to 0$.

Pour des α grands ($\alpha\gg 1$), l'intégrale

$$\int_0^{\omega_0}\frac{\omega^{4p}L\cdot U\,d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}$$

se situe entre les intégrales

$$\int_0^{\omega_0}\frac{(LU)_{\max}\,\omega^{4p}\,d\omega}{(L_{\min}+\alpha\omega^{2p})^2}\quad\text{et}\quad\int_0^{\omega_0}\frac{(LU)_{\min}\,\omega^{4p}\,d\omega}{(L_{\max}+\alpha\omega^{2p})^2}.$$

Mais

$$\int_0^{\omega_0}\frac{\omega^{4p}\,d\omega}{(\beta+\alpha\omega^{2p})^2}=\frac{1}{2p}\cdot\alpha^{-2-\frac{1}{2p}}\int_0^{\alpha\omega_0^{2p}}\frac{x^{1+\frac{1}{2p}}\,dx}{(\beta+x)^2},\qquad(\beta\geqslant 0).$$

Lorsque $\alpha\to\infty$, la dernière intégrale tend vers l'infini comme $\alpha^{\frac{1}{2p}}$. Par conséquent,

$$\int_0^{\omega_0}\frac{\omega^{4p}\,d\omega}{(\beta+\alpha\omega^{2p})^2}=O(\alpha^{-2})$$

et

$$\alpha^{\frac{2p}{q}} \int_0^{\omega_0} \frac{\omega^{4p} \cdot L \cdot U \, d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} = O\left(\alpha^{-\frac{2n}{q}}\right).$$

Considérons nos intégrales de ω_0 à ∞:

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{L^2 N \omega^{4p} \, d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} = N_0 \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\omega^{4p-2b} \, d\omega}{\left(1+\frac{\alpha}{|A|^2}\omega^{2q}\right)^2} =$$

$$= \frac{N_0}{2q} \alpha^{\frac{-4p+2b-1}{2q}} \int_{\alpha\omega_0^{2q}}^{\infty} \frac{x^{\frac{4p-2b+1}{2q}-1} \, dx}{(1+x)^2}.$$

Quand $\alpha \to \infty$, la dernière intégrale tend vers zéro comme $\alpha^{\frac{-4n-2b+1}{2q}}$. Par conséquent,

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{L^2 N \omega^{4p} \, d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} = O(\alpha^{-2})$$

et

$$\alpha^{\frac{2p}{q}} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{L^2 N \omega^{4p} \, d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} = O\left(\alpha^{\frac{-2n}{q}}\right).$$

On trouve par analogie que

$$\alpha^{\frac{2p}{q}} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{L S \omega^{4p} \, d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} = O\left(\alpha^{\frac{-2n}{q}}\right).$$

Ainsi donc, pour $\alpha \to \infty$,

$$F(\alpha) = O\left(\alpha^{\frac{-2n}{q}}\right).$$

Estimons la dérivée $F'(\alpha)$ pour des α petits. Il est évident que

$$\frac{d}{d\alpha}[\ln F(\alpha)] = \frac{2p}{\alpha q} + \frac{d}{d\alpha}[\ln F_1(\alpha)],$$

où

$$F_1(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{L(LN+S)\omega^{4p} \, d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}.$$

La condition $F'(\alpha) = 0$ équivaut à la relation

$$\alpha F_1'(\alpha) + \frac{2p}{q} F_1(\alpha) = 0$$

ou à la relation

$$\alpha^{\frac{2p}{q}+1}F_1'(\alpha)+\frac{2p}{q}F(\alpha)=0. \qquad (5\,;\,3{,}2)$$

En reprenant les raisonnements faits pour l'estimation de la fonction $F(\alpha)$ pour des α petits, on trouve que pour des α petits le premier membre de l'équation (5; 3,1) s'écrit

$$\tilde{C}_1(\alpha)\gamma\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\gamma}-\tilde{C}_2(\alpha)\mu\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{-\mu}\frac{S_0}{|A|^2}+O\left(\alpha^{\frac{2p}{q}}\right), \qquad (5\,;\,3{,}3)$$

où

$$\tilde{C}_1(\alpha)\to 2|A|^{\frac{-4p}{q}}C_{10},\quad \tilde{C}_2(\alpha)\to 2|A|^{\frac{-4p}{q}}C_{20}\text{ pour }\alpha\to 0.$$

La somme (5; 3,3) peut s'écrire comme suit:

$$\tilde{C}_1(\alpha)\gamma\alpha_1^{-\mu}\left\{\alpha_1^{\gamma+\mu}+\frac{\mu}{\gamma}\frac{\tilde{C}_2(\alpha)}{\tilde{C}_1(\alpha)}\frac{S_0}{|A|^2}+O\left(\alpha_1^{\frac{2p}{q}+\mu}\right)\right\},\qquad \alpha_1=\frac{\alpha}{|A|^2}.$$

Puisque $\gamma>0$, $\mu>0$, $\frac{2p}{q}+\mu>0$ et $\tilde{C}_2/\tilde{C}_1>0$, pour des S_0 faibles la fonction de la variable α_1

$$f_2(\alpha_1)=\alpha_1^{\gamma+\mu}-\frac{\mu}{\gamma}\frac{S_0}{|A|^2}\frac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1}+O\left(\alpha_1^{\frac{2p}{q}+\mu}\right)$$

s'annule en un certain point $\alpha_1=\alpha_{1,\min}$, tel que le point $\alpha_{\min}=\alpha_{1,\min}\cdot|A|^2$ se situe dans le domaine de validité de la représen-

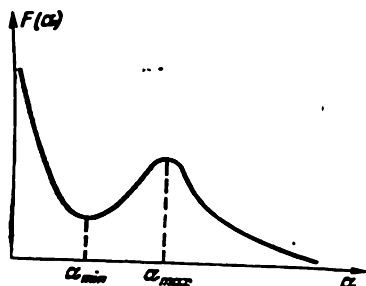


Fig. 8

tation (5; 3,1) pour la fonction $F(\alpha)$ (fig. 8). Le point $\alpha=\alpha_{\min}$ ne peut être autre que le point de minimum local de la fonction $F(\alpha)$. Il est évident que

$$\alpha_{\min}=\alpha_{\min}(S_0)$$

et que

$$\lim_{S_0\to 0}\alpha_{\min}(S_0)=0.$$

En estimant $F(\alpha)$ pour des α grands, on trouve que lorsque $\alpha \to \infty$ la fonction $F(\alpha)$ tend monotonement vers zéro (si $\alpha \gg 1$). De cette tendance et du fait que la fonction $F(\alpha)$ admet pour $\alpha = \alpha_{\min}$ un minimum local, on déduit l'existence d'un point $\alpha = \alpha_{\max}$ ($\alpha_{\max} > \alpha_{\min}$) où la fonction $F(\alpha)$ admet un maximum local. Evidemment $\alpha_{\max} = \alpha_{\max}(S_0)$. Le théorème est démontré.

4. Il est à noter que le rapport $\frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max}}$ tend vers zéro quand $S_0 \to 0$. On peut considérer la condition

$$\frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max}} \ll 1$$

comme critère de petitesse du bruit et, par conséquent, comme critère d'applicabilité des résultats exposés à l'analyse des courbes expérimentales de $u(t)$.

Lorsque p vérifie l'inégalité

$$4p > 2b - 1,$$

on peut négliger le premier terme dans la formule de $f_2(\alpha_1)$. Alors la condition $f_2(\alpha_1) = 0$ nous donne

$$\alpha_{\min} = \left(\frac{\widetilde{C}_2}{\widetilde{C}_1} \frac{\mu}{\gamma} \frac{S_0}{|A|^2} \right)^{\frac{1}{\gamma+\mu}}.$$

Lorsqu'il s'agit des processus *ergodiques*, la fonction $F(\alpha)$ se laisse définir par la formule suivante, sans qu'il soit nécessaire de connaître *a priori* les caractéristiques H. F. de la solution cherchée et du bruit :

$$F(\alpha) = (\alpha)^{\frac{-2n}{q}} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{A^* (Az_\alpha - u)\}^2 \, dt.$$

Connaissant la fonction $F(\alpha)$, on détermine de façon unique les valeurs des paramètres N_0, b; S_0, a.

En effet, sur l'intervalle $(0, \alpha_{\min})$ la courbe $y = F(\alpha)$ se détermine seulement par les paramètres a, S_0, p, n, car pour des α petits, le terme prépondérant dans la formule de $F(\alpha)$ est

$$C_4(\alpha) \frac{S_0}{|A|^2} \left(\frac{\alpha}{|A|^2} \right)^{-\mu},$$

où

$$C_4(\alpha) = 2C_2(\alpha) |A|^{\frac{-4p}{q}}$$

et

$$C_2(\alpha) \to \frac{\pi}{(2q)^2} \frac{2p - 2a + 1}{\sin\left(\frac{2p - 2a + 1}{2q} \pi \right)} \quad \text{pour } \alpha \to 0.$$

Sur l'intervalle $(\alpha_{min}, \alpha_{max})$ la courbe $y = F(\alpha)$ est déterminée seulement par les paramètres N_0, b; p, n, car sur cet intervalle le terme prépondérant dans la formule de $F(\alpha)$ est

$$C_3(\alpha)\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\nu},$$

où

$$C_3(\alpha) = 2|A|^{\frac{-4p}{q}} C_1(\alpha)$$

et

$$C_1(\alpha) \to \frac{\pi N_0}{(2q)^2} \frac{2p-2n-2b+1}{\sin\left(\frac{2p-2n-2b+1}{2q}\pi\right)} \quad \text{pour } \alpha \to 0.$$

Puisque, dans le cas des processus ergodiques, la fonction $F(\alpha)$ se laisse définir sans l'aide d'aucune information supplémentaire concernant les caractéristiques H.F. du signal et du bruit, on peut alors, en se basant sur les solutions régularisées, déterminer les paramètres S_0, a; N_0, b.

Dans le cas des processus stationnaires quelconques, on détermine les paramètres indiqués d'après *une famille des solutions régularisées* $\{z_\alpha(t)\}$ contenant un nombre assez élevé de fonctions $z_\alpha(t)$ (par exemple, par la méthode des moindres carrés).

5. Nous venons d'examiner en détail le problème de détermination des caractéristiques H.F. du signal et du bruit pour les équations à noyaux du Ier type. Dans le cas des noyaux fortement lissants ($n \gg b$, a), on peut poser aussi $n \gg p$. Alors le facteur $\alpha^{-\frac{2n}{n+p}}$ dans la fonction $F(\alpha)$ s'écrira comme suit:

$$\alpha^{-2\left(1-\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}-\dots\right)} \approx \alpha^{-2\left(1-\frac{p}{n}\right)},$$

où $p/n \ll 1$.

Compte tenu de ce qui précède et de ce que les noyaux des types II et III sont fortement lissants, on définit pour ces types la fonction $F(\alpha)$ comme suit:

$$F(\alpha) = \alpha^{-2+\varepsilon\cdot p} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\{A^*[Az_\alpha - u]\}^2\, dt},$$

où $\varepsilon \cdot p \ll 1$.

Ayant défini ainsi la fonction $F(\alpha)$, on retrouvera, en reprenant les raisonnements faits à propos des noyaux du Ier type, les mêmes résultats concernant la possibilité de déterminer les caractéristiques H. F. du signal et du bruit.

Les estimations de convergence des solutions régularisées sont données aussi dans les travaux [44, 45, 130]. Dans [83] on examine les conditions dans lesquelles les problèmes amenant à des équations du type de convolution sont bien posés.

CHAPITRE VI

MÉTHODES STABLES DE SOMMATION DES SÉRIES DE FOURIER À COEFFICIENTS APPROCHÉS DANS LA MÉTRIQUE DE l_2

1. Le problème de sommation d'une série de Fourier suivant un système de fonctions orthonormé donné $\{\varphi_n(t)\}$ consiste à rechercher la fonction $f(t)$ d'après ses coefficients de Fourier.

Assez souvent, en cherchant à définir expérimentalement une fonction $f(t)$, qui caractérise le processus ou phénomène étudié, on mesure ses coefficients de Fourier $\{a_n\}$ suivant un certain système orthonormé de fonctions $\{\varphi_n(t)\}$. Comme les mesures se font toujours avec une certaine imprécision, au lieu des a_n on obtient des valeurs approchées des coefficients de Fourier c_n. Il s'agit donc de sommer des séries de Fourier à coefficients approchés.

Il a été indiqué à l'Introduction (voir l'exemple 3) que le problème de sommation des séries de Fourier n'est pas stable vis-à-vis de faibles variations (dans la métrique de l_2) des coefficients de Fourier si l'écart de la somme est estimé dans la métrique de C et que ce problème soit donc mal posé.

La méthode connue depuis longtemps de sommation des séries de Fourier à coefficients approchés consiste à prendre en qualité de valeur approchée de la somme $f(t)$ d'une telle série la somme d'un nombre fini (pas très grand) de ses premiers termes, c'est-à-dire à poser

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{k} c_n \varphi_n(t).$$

Nous avons proposé dans [158] une méthode de sommation basée sur l'idée de la régularisation, stable vis-à-vis de faibles variations des coefficients dans la métrique de l_2.

Comme dans [158], nous dirons que la méthode de sommation des séries de Fourier des fonctions $f(t) \in F$ à coefficients $\{c_n\}$ approchés dans la métrique de l_2 est *stable* au sens de la métrique de l'espace F si pour tout nombre positif $\varepsilon > 0$ on trouve un $\delta(\varepsilon)$ tel que l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - \tilde{c}_n)^2 \leqslant \delta^2(\varepsilon)$$

entraîne l'inégalité

$$\rho_F(f, \tilde{f}) \leqslant \varepsilon,$$

où f et $\tilde{f}$ sont les résultats de sommation par la méthode proposée respectivement des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \varphi_n(t).$$

2. Désignons par C_D l'espace des fonctions continues dans un domaine fermé fini $\bar{D}$ muni de la métrique de C. Considérons les séries de Fourier suivant le système de fonctions $\{\varphi_n(t)\}$ pour les fonctions $f(t)$ de C_D.

Nous allons construire au § 1, conformément à [158] et [12], une classe de méthodes stables de sommation des séries de Fourier basées sur l'idée de la régularisation.

On peut considérer le problème de sommation de la série de Fourier d'une fonction $f(t)$ comme le problème de résolution d'une certaine équation opératorielle par rapport à $f(t)$. En effet, si l'on fait correspondre à chaque fonction de l'ensemble F un élément u de l'espace l_2, et notamment, la suite de ses coefficients de Fourier $\{a_n\}$ suivant le système $\{\varphi_n(t)\}$ (de poids $\rho(t)$), c'est-à-dire l'élément $u \equiv \{a_n\}$, cette correspondance s'écrira comme

$$Af = u. \tag{6; 0,1}$$

Il est évident que cet opérateur de C_D dans l_2 est continu sur C_D.

Le problème de sommation d'une série de Fourier, qui consiste à rechercher la fonction $f(t)$ d'après la suite connue de ses coefficients de Fourier $u \equiv \{a_n\}$, est ramené donc à la résolution de l'équation (6; 0,1) par rapport à $f(t)$. On sait du cours d'Analyse que ce problème admet dans la classe C_D une solution et une seule.

§ 1. Classes de méthodes stables de sommation des séries de Fourier

1. Si l'on connaît des valeurs approchées des coefficients de Fourier de la fonction cherchée, c'est-à-dire de l'élément u qui constitue le second membre de l'équation (6; 0,1), on ne peut trouver qu'une solution approchée du problème. Ce problème étant mal posé, il est logique d'essayer de le résoudre par la méthode de régularisation.

En qualité de fonctionnelle stabilisante $\Omega[f]$, nous allons prendre, comme dans [12], une fonctionnelle de la forme

$$\Omega[f] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \cdot \xi_n \tag{6; 1,1}$$

définie par la donnée de la suite $\{\xi_n\}$. Ici f_n sont les coefficients de Fourier de la fonction $f(t)$ suivant un système de fonctions complet orthonormé $\{\varphi_n(t)\}$ (de poids $\rho(t) > 0$), et $\{\xi_n\}$ une suite de nombres positifs dont l'ordre de croissance pour $n \to \infty$ n'est pas inférieur à $n^{2+\varepsilon}$, avec $\varepsilon \geqslant 0$. Il est facile de voir que pour tout nombre positif $d > 0$ l'ensemble des fonctions $f(t) \in C_D$ pour lesquelles $\Omega[f] \leqslant d$ est un compact dans C_D *).

Les fonctionnelles stabilisantes de ce type représentent une généralisation naturelle des fonctionnelles $\Omega[f]$ que nous avons utilisées dans le chapitre II.

Soit en effet $\{\varphi_n(t)\}$ un système orthonormé complet des fonctions propres du problème aux limites de la forme

$$\frac{d}{dt}[k(t)\varphi'(t)] - q(t)\varphi(t) + \lambda\varphi(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant l,$$

$$\varphi(0) = 0 = \varphi(l),$$

où $k(t) > 0$ et $q(t) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[0, l]$, et $\{\lambda_n\}$ est l'ensemble des valeurs propres de ce problème. La fonctionnelle stabilisante

$$\Omega[f] = \int_0^l \{k(f')^2 + qf^2\}\, dt$$

que nous avons utilisée au § 4, ch. II, pour les fonctions $f(t)$ vérifiant les conditions $f(0) = f(l) = 0$, peut s'écrire alors sous la forme d'une série

$$\Omega[f] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \lambda_n,$$

où f_n sont les coefficients de Fourier de la fonction $f(t)$ suivant le système $\{\varphi_n(t)\}$. En effet, en faisant l'intégration par parties, on obtient

$$\int_0^l k(f')^2\, dt = ff'k\Big|_0^l - \int_0^l f \frac{d}{dt}(kf')\, dt = -\int_0^l f \frac{d}{dt}(kf')\, dt.$$

Donc, $\Omega[f] = \int_0^l f\left\{qf - \frac{d}{dt}(kf')\right\} dt$. En substituant dans le second membre de cette formule au lieu de la fonction $f(t)$ sa série de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \varphi_n(t),$$

*) Il en sera de même si l'ordre de croissance de la suite $\{\xi_n\}$ pour $n \to \infty$ est non inférieur à $n^{1+\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$.

on trouve

$$\Omega[f]=\int_0^l\left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m\cdot\varphi_m(t)\right)\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left\{q\varphi_n(t)-\frac{d}{dt}[k\cdot\varphi_n']\right\}dt=$$

$$=\sum_{n,\,m=1}^{\infty} f_n f_m\int_0^l \varphi_m(t)\left\{q\cdot\varphi_n-\frac{d}{dt}(k\varphi_n')\right\}dt.$$

Puisque $q\varphi_n-\frac{d}{dt}(k\varphi_n')\equiv\lambda_n\varphi_n$ et que pour $n\neq m$ les fonctions $\varphi_n(t)$ et $\varphi_m(t)$ sont orthogonales, on a

$$\Omega(f)=\sum_{\substack{n=1\\m=1}}^{\infty} f_n f_m\lambda_n\int_0^l \varphi_m\varphi_n\,dt=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2\lambda_n.$$

2. Précisons la position du problème. Désignons par $\mathfrak{M}$ l'ensemble de toutes les suites $\{\xi_n\}$ mentionnées plus haut qui répondent à toutes les valeurs possibles de $\varepsilon\geqslant 0$ [12].

Soient donnés dans un domaine fermé fini $\bar{D}$ de l'espace euclidien R^N de dimension N un système orthonormé complet (de poids $\rho(t)>0$) de fonctions $\{\varphi_n(t)\}$, avec $t=(t_1, t_2, \ldots, t_N)$, et une fonction $\hat{f}(t)$ continue dans $\bar{D}$ et développable en série de Fourier suivant le système $\{\varphi_n(t)\}$

$$\hat{f}(t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(t),$$

où

$$a_n=\int_D \rho(t)\hat{f}(t)\varphi_n(t)\,dt.$$

Supposons qu'on connaisse au lieu des coefficients de Fourier a_n leurs valeurs approchées $c_n=a_n+\gamma_n$ entachées de petites erreurs γ_n (dans la métrique de l_2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^2\leqslant\delta^2,$$

c'est-à-dire qu'au lieu de la suite $\hat{u}\equiv\{a_n\}$, on a une suite $u_\delta\equiv\{c_n\}$ pour laquelle $\rho_{l_2}(\hat{u}, u_\delta)\leqslant\delta$. Nous avons donc au lieu de la série de Fourier à coefficients exacts

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(t)$$

une série à coefficients approchés

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t). \qquad (6\,;\ 1{,}2)$$

Proposons-nous de rechercher, dans la classe C_D, d'après une suite de nombres $\{c_n\}$ proche (dans la métrique de l_2) de la suite $\{a_n\}$ des coefficients de Fourier de la fonction $\hat{f}(t)$, une fonction $\tilde{f}(t)$ approchant $\hat{f}(t)$, c'est-à-dire telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \leqslant \delta^2,$$

et ceci avec $\rho_C(\tilde{f}, \hat{f}) \to 0$ quand $\delta \to 0$.

On ne peut prendre en qualité de $\tilde{f}(t)$ la somme $S(t)$ de la série (6; 1,2) calculée par la formule

$$S(t) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} c_n \varphi_n(t),$$

car cette somme, ainsi qu'il a été montré dans l'Introduction, n'est pas stable vis-à-vis de faibles (dans la métrique de l_2) variations des coefficients $\{c_n\}$.

Il est évident que la solution doit être cherchée dans la classe Q_δ des fonctions de C_D pour lesquelles est vérifiée l'inégalité

$$\rho_{l_2}(Af,\ u_\delta) \leqslant \delta.$$

Or, cette classe n'est pas compacte; elle est trop large. Pour la restreindre, prenons une fonctionnelle fixée $\Omega_1[f]$ de la forme (6; 1,1) décrite au p. 1,

$$\Omega_1[f] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \xi_n,$$

où $\{\xi_n\} \in \mathfrak{M}$.

Soit F_ξ l'ensemble des fonctions de C_D pour lesquelles la fonctionnelle $\Omega_1[f]$ est définie, et soit

$$F_{\delta,\xi} = Q_\delta \cap F_\xi.$$

Cherchons l'approximation de la fonction $\hat{f}(t)$ sur l'ensemble $F_{\delta,\xi} \subset C_D$.

Dans la suite, pour fixer les idées, nous allons nous placer dans le cas unidimensionnel. Dans ces conditions t est la coordonnée d'un point sur la droite, et le domaine D est un intervalle fini (a, b).

Puisque nous avons ramené le problème de recherche de la fonction $\hat{f}(t)$ d'après ses coefficients de Fourier à la résolution de l'équation opératorielle (6; 0,1), il est logique de chercher son approxi-

mation par la méthode de régularisation. A cet effet, considérons la fonctionnelle

$$M^{\alpha}[u_{\delta}, f] = \rho_{l_2}^2(Af, u_{\delta}) + \alpha\Omega_1[f]$$

contenant un paramètre numérique α (c'est le paramètre de régularisation). Elle peut s'écrire aussi comme suit:

$$M^{\alpha}[u_{\delta}, f] = \sum_{n=1}^{\infty}(f_n - c_n)^2 + \alpha\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \xi_n, \qquad (6\,;\ 1{,}3)$$

où f_n sont les coefficients de Fourier de la fonction $f(t)$ suivant le système $\{\varphi_n(t)\}$ de poids $\rho(t) > 0$, c'est-à-dire que

$$f_n = \int_D f(t)\,\rho(t)\,\varphi_n(t)\,dt. \qquad (6\,;\ 1{,}4)$$

Pour la fonctionnelle lissante $M^{\alpha}[f, u_{\delta}]$ sont vrais les théorèmes 1 et 2 du § 3, ch. II, qui se démontrent dans le cas présent de façon analogue.

Il existe donc dans $F_{\delta,\xi}$ une fonction $\tilde{f}_{\alpha}(t)$ qui réalise le minimum de la fonctionnelle $M^{\alpha}[f, u_{\delta}]$ sur l'ensemble $F_{\delta,\xi}$. C'est justement cette fonction que nous allons considérer comme approximation de la fonction $\hat{f}(t)$.

Nous appellerons la fonctionnelle $\Omega_1[f]$ *fonctionnelle stabilisante* pour le problème de sommation stable des séries de la forme (6 ; 1,2).

R e m a r q u e 1. Si l'on prend, en tant que système de fonctions $\{\varphi_n(t)\}$, les fonctions propres du problème aux limites

$$\operatorname{div}(k\nabla\varphi) - q^2(t)\,\varphi + \lambda\rho(t)\,\varphi = 0, \qquad t \in D,$$
$$\varphi|_S = 0 \ \left(\text{ou } \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = 0\right),$$

où S est la frontière du domaine dans lequel est cherchée la solution, on peut prendre la fonctionnelle $\Omega_1[f]$ sous la forme

$$\Omega_1[f] = \int_D \{k(\nabla f)^2 + q^2 f^2\}\,dt$$

ou sous une forme équivalente

$$\Omega_1[f] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \lambda_n,$$

où λ_n sont les valeurs propres du problème aux limites indiqué, et f_n, les coefficients de Fourier de la fonction $f(t)$ suivant le système $\{\varphi_n(t)\}$ de poids $\rho(t)$.

3. Les coefficients de Fourier de la fonction $\tilde{f}_\alpha(t)$ suivant le système $\{\varphi_n(t)\}$ sont tirés de la condition de nullité des dérivées partielles de la fonctionnelle (6; 1,3) par rapport aux variables f_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Il vient

$$\tilde{f}_{\alpha,\,n}=\frac{c_n}{1+\alpha\xi_n}.$$

Ainsi donc, on peut écrire l'approximation cherchée de la fonction $\hat{f}(t)$ sous la forme

$$\tilde{f}_\alpha(t)=\sum_{n=1}^{\infty} r(n,\ \alpha)\,c_n\varphi_n(t), \qquad (6;\ 1{,}5)$$

où

$$r(n,\ \alpha)=\frac{1}{1+\alpha\xi_n},$$

et calculer $\tilde{f}_\alpha(t)$ comme suit:

$$\tilde{f}_\alpha(t)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} r(n,\ \alpha)\,c_n\varphi_n(t). \qquad (6;\ 1{,}6)$$

4. Les formules (6; 1,5) et (6; 1,6) déterminent une méthode stable de sommation de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(t),$$

stable au sens de la métrique de C vis-à-vis de faibles (dans la métrique de l_2) variations de ses coefficients c_n. En effet, exprimons la procédure décrite de recherche de la fonction $\tilde{f}_\alpha(t)$ à l'aide d'un opérateur $R(u,\ \alpha)$,

$$\tilde{f}_\alpha(t)=R(u_\delta,\ \alpha).$$

Cet opérateur est régularisant pour l'équation (6; 0,1), ce qui signifie qu'il est stable au sens indiqué ci-dessus.

Signalons que la valeur du paramètre α doit être adaptée au niveau de l'erreur sur les données initiales δ, $\alpha = \alpha(\delta)$. Cette valeur peut être tirée par exemple de la condition $\rho_{l_2}(A\tilde{f}_\alpha,\ u_\delta) = \delta$, laquelle peut s'écrire aussi comme suit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\frac{\alpha^2\xi_n^2}{(1+\alpha\xi_n)^2}=\delta^2.$$

La justification en est absolument la même que dans le chapitre II.

Pour $\delta^2 < \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$, on détermine α par cette méthode de façon unique, puisque la fonction

$$\psi(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \frac{\alpha^2 \xi_n^2}{(1+\alpha\xi_n)^2}$$

est continue et monotonement croissante dans le domaine $\alpha > 0$ et $\psi(0) = 0$. En effet,

$$\psi'(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \left\{ \frac{2\alpha\xi_n^2}{(1+\alpha\xi_n)^2} - \frac{\alpha^2\xi_n^2 \cdot 2\xi_n}{(1+\alpha\xi_n)^3} \right\} = 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \frac{\xi_n^2}{(1+\alpha\xi_n)^3} > 0.$$

Comme $\psi(\alpha) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$, pour $\delta^2 > \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$ l'équation $\psi(\alpha) = \delta^2$ n'a pas de solution.

Remarque 2. La somme de la série initiale

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t),$$

interprétée comme la limite

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} c_n \varphi_n(t),$$

ne peut servir d'approximation de la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t),$$

car elle est instable vis-à-vis de faibles (dans la métrique de l_2) variations des coefficients c_n. D'autre part, la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha\xi_n} c_n \varphi_n(t),$$

interprétée de même comme la limite

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{1+\alpha\xi_n} c_n \varphi_n(t),$$

est stable aux faibles (dans la métrique de l_2) variations des coefficients c_n et, lorsque la valeur $\alpha = \alpha(\delta)$ est adaptée à l'erreur entachant les coefficients c_n, approche uniformément la fonction $\hat{f}(t)$.

On en déduit que les facteurs

$$r(n, \alpha) = \frac{1}{1+\alpha\xi_n}$$

jouent un rôle stabilisant. Nous les appellerons *facteurs stabilisants*.

En posant $r(k, \alpha) = \left\{ \begin{matrix} 1, & k \leqslant n \\ 0, & k > n \end{matrix} \right\}$, on retrouve la méthode de sommation classique indiquée à la page 139. Dans ce cas on doit prendre la suite $\{\xi_k\}$ de la forme

$$\xi_k < \infty \quad \text{pour} \quad k \leqslant n, \quad \xi_k = \infty \quad \text{pour} \quad k > n$$

et ensuite poser $\alpha = 0$.

Remarque 3. Si, dans la méthode de sommation classique d'une série de Fourier par passage à la limite pour $n \to \infty$, on prend dans la somme partielle

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)$$

le nombre n adapté à l'erreur δ des coefficients $\{c_n\}$, une telle sommation sera stable.

Remarque 4. Si la fonction $\hat{f}(t)$ est continue par morceaux, la méthode décrite fournit une méthode de sommation stable en chaque point de continuité de $\hat{f}(t)$.

§ 2. Sur les méthodes optimales de sommation des séries de Fourier

1. Disposant d'une classe étendue de méthodes stables de sommation des séries de Fourier, il est naturel de se demander laquelle de ces méthodes est optimale en tel ou tel sens. Dans ce paragraphe, nous allons résoudre ce problème en le posant de différentes façons [12].

Les coefficients de la série de Fourier à sommer, connus approximativement, peuvent être entachés d'erreurs aléatoires incontrôlables. Aussi peut-on les considérer comme étant des nombres aléatoires et, en cherchant à établir de façon approchée la somme de la série, employer des méthodes probabilistes.

2. On suppose que les erreurs entachant les coefficients de Fourier, c'est-à-dire les quantités γ_n, sont des nombres aléatoires satisfaisant les exigences suivantes:

1) $\{\gamma_n\}$ est une suite de nombres aléatoires non corrélés deux à deux;

2) les espérances mathématiques de ces nombres sont égales à zéro, $\overline{\gamma_n} = 0$, pour tout n.

Dans ces conditions les valeurs approchées des coefficients de Fourier c_n sont également des nombres aléatoires. Les espérances mathématiques des nombres aléatoires c_n^2 et γ_n^2 vérifient les relations

$$\overline{c_n^2} = a_n^2 + \overline{\gamma_n^2}.$$

Les variances des variables aléatoires c_n et γ_n sont les mêmes et sont égales à $\sigma_n^2 = \overline{\gamma_n^2}$. Elles seront supposées connues.

Par conséquent, la fonction $\tilde{f}_\alpha(t)$ réalisant le minimum de la fonctionnelle M^α pour une suite fixée de nombres $\{\xi_n\} \in \mathfrak{M}$, est une fonction aléatoire.

Soit

$$(\Delta f_\alpha)_\xi = \tilde{f}_\alpha(t) - \hat{f}(t),$$

où

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t).$$

Comme mesure de l'écart de la fonction $\tilde{f}_\alpha(t)$ par rapport à $f(t)$ on peut adopter l'espérance mathématique du carré de la quantité $(\Delta f_\alpha)_\xi$, c'est-à-dire la grandeur

A) $$\overline{(\Delta f_\alpha)_\xi^2}\ ^{*)}$$

ou l'intégrale

B) $$\int_D \rho(t)\, \overline{(\Delta f_\alpha)_\xi^2}\, dt.$$

3. Ceci posé, soit une série de Fourier à coefficients approchés $\{c_n\}$. Sa somme approchée, stable vis-à-vis de faibles variations (dans la métrique de l_2) des coefficients $\{c_n\}$, comme nous l'avons vu au § 2, dépend de α et du choix de la suite $\{\xi_n\}$ de $\mathfrak{M}$. Proposons-nous de chercher une somme approchée telle que son écart par rapport à $\hat{f}(t)$ pour α fixé soit le plus petit possible au sens de

$$\inf_{\{\xi_n\}\in\mathfrak{M}} \int_D \overline{(\Delta f_\alpha)_\xi^2}\, \rho(t)\, dt \quad \text{et} \quad \inf_{\{\xi_n\}\in\mathfrak{M}} \overline{(\Delta f_\alpha)_\xi^2}.$$

Quelle information supplémentaire concernant les coefficients c_n et le bruit est-elle nécessaire pour cela? Pour donner la réponse à

*) Connaissant la densité de probabilité $p(x)$ de la variable $(\Delta f)_\xi^2 = x$, on peut calculer l'espérance mathématique $\overline{(\Delta f)_\xi^2}$ pour $a \leqslant x \leqslant b$ par la formule

$$\overline{(\Delta f)_\xi^2} = \int_a^b (\Delta f)_\xi^2\, p(x)\, dx.$$

cette question, cherchons les sommes approchées aux sens indiqués ci-dessus. Pour l'écart du type B) on a

$$\int_D \overline{(\Delta f_\alpha)_\xi^2}\,\rho(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2 + \alpha^2\xi_n^2(\overline{c_n^2}-\sigma_n^2)}{(1+\alpha\xi_n)^2} = \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots).$$

L'écart sera minimal pour les valeurs de $\xi_n = \xi_n'$ pour lesquelles les dérivées $\partial\Phi/\partial\xi_n$ s'annulent. De ces conditions on trouve sans peine

$$\xi_n' = \frac{\sigma_n^2}{\alpha(\overline{c_n^2}-\sigma_n^2)}.$$

Par conséquent,

$$r'(n, \alpha) = \frac{1}{1+\alpha\xi_n'} = 1 - \frac{\sigma_n^2}{\overline{c_n^2}}.$$

Ainsi donc, la somme optimale au sens du minimum de B) se présente comme suit:

$$\tilde{f}_{\text{opt}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sigma_n^2}{\overline{c_n^2}}\right) c_n \varphi_n(t). \qquad (6\,;\ 2{,}1)$$

Par analogie, pour l'écart du type A), on constate que la somme optimale en un point fixé $t = t_0$ sera

$$f_{\text{opt}}(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sigma_n^2}{\overline{c_n^2}}\right) c_n \varphi_n(t_0). \qquad (6\,;\ 2{,}2)$$

Ainsi donc, pour trouver les sommes optimales, aux sens indiqués plus haut, des séries à coefficients approchés $\{c_n\}$, on doit connaître $\overline{c_n^2}$ et σ_n^2 pour tous les n. Cela équivaut à connaître les coefficients de Fourier exacts a_n, car $\overline{c_n^2} = a_n^2 + \sigma_n^2$ *).

Or, les formules (6; 2,1) et (6; 2,2) ne contiennent que les rapports $\sigma_n^2/\overline{c_n^2}$. Dans certains problèmes concrets, on est en mesure de trouver les valeurs approchées de ces rapports. Quelle variation des sommes (6; 2,1) et (6; 2,2) en résultera-t-elle?

Soit

$$\left(\frac{\sigma_n^2}{\overline{c_n^2}}\right)_{\text{approxi}} = \frac{\sigma_n^2}{\overline{c_n^2}}(1+\beta_n),$$

où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \leqslant \varepsilon.$$

*) Cf. la filtration optimale au sens de Wiener, ch. V, § 2.

Connaissant ces valeurs, on trouvera la somme

$$\tilde{f}_{\text{opt., approxi}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\sigma_n^2}{\overline{c_n^2}} \right)_{\text{approxi}} \right] c_n \varphi_n(t).$$

Si l'on sait en outre que pour tout n

$$\varphi_n^2(t) \leqslant Q,$$

alors

$$|\tilde{f}_{\text{opt., approxi}}(t) - \hat{f}(t)| \leqslant \sqrt{Q \cdot \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2}.$$

Ainsi donc, la sommation optimale effectuée avec les facteurs stabilisants

$$r'(n, \alpha) = 1 - \sigma_n^2/\overline{c_n^2}$$

est stable vis-à-vis de faibles variations des nombres $\sigma_n^2/\overline{c_n^2}$ au sens indiqué.

Une autre méthode de sommation stable des séries de Fourier est étudiée dans [90].

CHAPITRE VII

SUR LES MÉTHODES STABLES DE MINIMISATION DES FONCTIONNELS ET DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE COMMANDE OPTIMALE

1. Le problème mathématique de minimisation des fonctionnelles $f(z)$ se présente dans beaucoup de problèmes pratiques de grande importance. Deux types de problèmes sont à distinguer. Au premier type se rapportent les problèmes dans lesquels il s'agit de chercher la valeur minimale (maximale) d'une fonctionnelle. Ce cas se rencontre souvent dans l'établissement de projets d'un système optimal ou d'une construction optimale. Pour ce type de problèmes il n'est pas essentiel de savoir sur quels éléments z se réalise le minimum cherché ; aussi peut-on prendre en qualité de solutions approchées les valeurs de la fonctionnelle sur n'importe quelle suite minimisant $\{z_n\}$, c'est-à-dire telle qu'on ait $f(z_n) \to \inf f(z)$ pour $n \to \infty$.

Dans les problèmes du deuxième type, on demande de trouver les éléments z sur lesquels est atteint le minimum de la fonctionnelle $f(z)$. Ce sont les problèmes de *minimisation par rapport à l'argument*. Dans certains problèmes de ce type, les suites minimisantes ne sont pas convergentes. Evidemment, on ne peut pas prendre dans ces cas comme solution approchée les éléments de la suite minimisante. Il est naturel d'appeler de tels problèmes *instables*, ou *mal posés*. De ce point de vue, des classes entières de problèmes de commande optimale d'importance pratique capitale s'avèrent mal posés. Tels sont par exemple les problèmes dans lesquels la fonctionnelle à optimiser ne dépend que de variables de phase [168].

Le chapitre présent est consacré aux méthodes stables de résolution des problèmes du deuxième type.

2. Soit une fonctionnelle continue $f[z]$ définie sur un espace métrique F. Minimiser la fonctionnelle $f[z]$ sur l'ensemble F c'est trouver l'élément $z_0 \in F$ sur lequel $f[z]$ atteint sa plus petite valeur f_0:

$$\inf_{z \in F} f[z] = f[z_0] = f_0. \qquad (7\ ;\ 0{,}1)$$

Supposons que ce problème admette une solution et une seule z_0. Soit $\{z_n\}$ la suite minimisante, c'est-à-dire telle que

$$\lim_{n \to \infty} f[z_n] = f_0.$$

On dit que le problème de minimisation de la fonctionnelle $f[z]$ sur l'ensemble F est *stable* (voir [171]) si toute suite minimisante $\{z_n\}$ converge (dans la métrique de l'espace F) vers l'élément z_0 de F.

On dit que le problème (7 ; 0,1) de minimisation de la fonctionnelle $f[z]$ sur l'ensemble F est *bien posé*, ou *correctement posé*, s'il est résoluble et stable. Dans le cas contraire, ce problème est dit *mal posé*.

Pour la recherche de l'élément z_0, on emploie largement les méthodes de minimisation directe de la fonctionnelle $f[z]$, en construisant à l'aide d'un algorithme convenable la suite minimisante $\{z_n\}$. Les éléments z_n pour lesquels $f[z_n]$ est suffisamment voisine de f_0 sont interprétés comme des valeurs approchées de l'élément cherché z_0.

Les méthodes directes de minimisation sont assez universelles par leur principe. Soit par exemple F l'ensemble des fonctions $z(t)$ d'une variable t. Cherchant à approcher la fonction $z(t)$ par ses valeurs aux nœuds du maillage $z_i = z(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, on arrive à un problème de recherche du minimum d'une fonction de n variables, problème que l'on résout par des méthodes suffisamment universelles non assujetties aux particularités de la fonctionnelle $f[z]$.

Or, un tel procédé de recherche d'une solution approchée n'est loisible que si la suite minimisante construite $\{z_n\}$ converge vers l'élément z_0.

On a signalé plus haut l'existence de problèmes de minimisation des fonctionnelles qui ne sont pas stables. On a affaire dans ces cas à des suites minimisantes qui ne convergent pas vers l'élément z_0.

Pour trouver les solutions approchées des problèmes instables de minimisation des fonctionnelles $f[z]$, il suffit d'indiquer les algorithmes de construction des suites minimisantes $\{z_n\}$ telles qu'elles convergent vers l'élément z_0.

3. Considérons les solutions du système d'équations différentielles

$$dx/dt = F(t, x, u) \qquad (7\,;\ 0{,}2)$$

vérifiant les conditions

$$x(t_0) = x_0, \qquad (7\,;\ 0{,}3)$$

où $x(t) = \{x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)\}$ est une fonction vecteur dans l'espace à n dimensions définie sur l'intervalle $t_0 \leqslant t \leqslant T$, x_0 est un vecteur donné, et $u(t) = \{u^1(t), u^2(t), \ldots, u^m(t)\}$ est une *fonction vecteur de commande* (ou la *commande*) dans l'espace métrique à m dimensions U.

Soit $f[x(t)]$ une fonctionnelle non négative donnée (fonctionnelle objectif) définie sur les solutions du système (7 ; 0,2).

Il est évident que les solutions du système (7 ; 0,2) dépendent de la commande choisie $u(t)$, c'est-à-dire que $x(t) = x_u(t)$. Aussi la valeur de la fonctionnelle $f[x(t)]$ sur chaque solution du système (7 ; 0,2) sera-t-elle une fonctionnelle de la fonction de commande $u(t)$ définie sur l'ensemble U, $f[x_u(t)] = \Phi[u]$.

On peut poser le problème de commande optimale comme problème consistant, par exemple, à trouver dans une classe de fonctions U_1 de l'espace U une fonction de commande $u_0(t)$ telle que la fonctionnelle $\Phi[u] = f[x_u(t)]$ passe sur cette fonction par le minimum (ou par le maximum).

Pareillement au problème de minimisation de la fonctionnelle $f[z]$ décrit au p. 1, ce problème peut tout aussi bien s'avérer instable. En effet, plaçons-nous dans le cas où la classe des commandes admissibles U_1 est un espace de fonctions d'une variable t muni d'une métrique uniforme et $f[x(t)]$ est une fonctionnelle continue. Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$. on peut trouver une commande $u_1(t)$ telle que

1) $$f[x_{u_1}(t)] \leqslant f[x_{u_0}(t)] + \varepsilon, \quad \text{et}$$

2) la différence $u_1(t) - u_0(t)$ puisse prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut, pourvu que les fonctions $u_1(t)$ et $u_0(t)$ appartiennent à la classe U_1. Choisissons la fonction $u_1(t)$ de telle sorte qu'elle coïncide avec $u_0(t)$ partout sauf sur l'intervalle $(t_1 - \tau, t_1 + \tau)$, où la différence $u_1(t) - u_0(t)$ est supérieure à un certain nombre fixé B compatible avec la condition d'appartenance des fonctions $u_1(t)$ et $u_0(t)$ à la classe U_1. Il est évident que pour tout $\delta > 0$ on peut trouver un $\tau = \tau(\delta)$ tel que pour les solutions $x_{u_1}(t)$, $x_{u_0}(t)$ du système (7 ; 0,2) avec (7 ; 0,3) correspondant aux commandes $u_1(t)$ et $u_0(t)$ ait lieu l'inégalité $|x_{u_1}(t) - x_{u_0}(t)| < \delta$. En donnant à δ, donc à $\tau = \tau(\delta)$, une valeur assez petite, on aura $f[x_u(t)] \leqslant f[x_{u_0}(t)] + \varepsilon$, tandis que $\sup\limits_t |u_1(t) - u_0(t)| \geqslant B$. On a démontré par là l'existence de problèmes instables de commande optimale.

R e m a r q u e. On peut prendre en qualité de fonctionnelle objectif une fonctionnelle qui dépend tant des variables de phase que des fonctions de commande.

Dans le chapitre présent, sont examinés les algorithmes de construction des suites minimisantes convergeant vers l'élément sur lequel la fonctionnelle proposée atteint son minimum.

§ 1. Méthode stable de minimisation des fonctionnelles

1. On demande de trouver l'élément $z_0 \in F$ sur lequel la fonctionnelle donnée $f[z]$ atteint sa valeur minimale sur l'ensemble F,

$$\inf_{z \in F} f[z] = f[z_0] = f_0. \qquad (7:1,1)$$

En reprenant les idées de [171], nous considérons dans ce paragraphe les méthodes de construction des suites minimisantes $\{z_n\}$ convergeant vers l'élément z_0.

On dit que la suite minimisante $S \equiv \{z_n\}$ de la fonctionnelle $f[z]$ est *régularisée* s'il existe un ensemble $\tilde{F}$ compact dans F et contenant S [171].

Il est évident que la suite minimisante régularisée converge vers l'élément z_0 si le problème de minimisation de la fonctionnelle $f[z]$ n'admet qu'une solution unique z_0. Si la fonctionnelle $f[z]$ est bornée inférieurement, alors elle atteint sa borne inférieure sur un point limite quelconque $\tilde{z}$ de la suite minimisante régularisée $\{z_n\}$, c'est-à-dire que

$$f[\tilde{z}] = f_0.$$

Ayant construit les suites minimisantes régularisées $\{z_n\}$, on peut prendre comme valeurs approchées de l'élément cherché z_0 les éléments z_n à indices n tels que $f[z_n]$ coïncide avec f_0 pour le degré de précision que l'on se donne.

Ainsi donc, il suffit de trouver les algorithmes de construction des suites minimisantes régularisées. A cet effet, on utilise les fonctionnelles stabilisantes $\Omega[z]$ décrites au chapitre II. Introduisons quelques définitions nécessaires pour l'exposé qui suit [171].

2. Soit $\tilde{F}$ un ensemble appartenant à F, $\tilde{F} \subset F$, et soit $\Omega[z]$ la fonctionnelle stabilisante.

Supposons que l'ensemble $\tilde{F} \subset F$ admet une métrique $\tilde{\rho}(z_1, z_2)$, $z_1, z_2 \in \tilde{F}$, majorante par rapport à celle de l'espace F *), c'est-à-dire telle que les sphères

$$S_r \equiv \{z;\quad z \in \tilde{F},\ \tilde{\rho}(z, \tilde{z}_0) \leqslant r\}$$

dans l'espace $\tilde{F}$ de centre arbitraire $\tilde{z}_0$ soient compactes dans F (dans la métrique de l'espace F). On dit alors que $\tilde{F}$ est une *injection s-compacte dans F*.

Si la métrique $\tilde{\rho}(z_1, z_2)$ définit une injection s-compacte de $\tilde{F}$ dans F et si $\varphi(q)$ est une fonction croissante non négative, la fonctionnelle

$$\Omega[z] = \varphi(\tilde{\rho}(z, \tilde{z}_0))$$

est évidemment stabilisante.

3. En calculant les fonctionnelles $f[z]$, on se satisfait souvent de leurs valeurs approchées. Le calcul approché d'une fonctionnelle $f[z]$ peut être regardé comme calcul d'une autre fonctionnelle, $\tilde{f}[z]$, ayant une norme d'écart petite par rapport à $f[z]$.

*) C'est-à-dire telle que $\tilde{\rho}(z_1, z_2) \geqslant \rho_F(z_1, z_2)$ pour deux éléments quelconques z_1, z_2 de $\tilde{F}$.

On entend par *norme d'écart* des fonctionnelles $\tilde{f}[z]$ et $f[z]$, définies sur l'ensemble $\tilde{F}$, par rapport à la fonctionnelle stabilisante $\Omega[z]$ le plus petit nombre δ pour lequel a lieu l'inégalité

$$|\tilde{f}[z]-f[z]|\leqslant\delta\Omega[z]$$

sur tous les éléments $z\in\tilde{F}$.

4. Passons à la construction des suites minimisantes régularisées pour la fonctionnelle $f[z]$. Admettons que

$$\inf_{z\in F} f[z]=f[z_0]=f_0.$$

Soient $\Omega[z]$ une fonctionnelle stabilisante et $f_\delta[z]$ une famille paramétrique des fonctionnelles (définies pour tout $\delta\geqslant 0$) approchant la fonctionnelle $f[z]$ sur l'ensemble $\tilde{F}$ de telle façon que

$$|f_\delta[z]-f[z]|\leqslant\delta\Omega[z].$$

Il sera supposé que l'élément z_0 minimisant la fonctionnelle $f[z]$ appartient à l'ensemble $\tilde{F}$.

Pour $\alpha>0$ quelconque, considérons la fonctionnelle

$$M^\alpha[z, f_\delta]=f_\delta[z]+\alpha\Omega[z]$$

définie sur tous les $z\in\tilde{F}$. Si $\delta<\alpha$, il est évident que $M^\alpha[z, f_\delta]$ est bornée inférieurement (sur $\tilde{F}$), car

$$M^\alpha[z, f_\delta]\geqslant f[z]-\delta\Omega[z]+\alpha\Omega[z]\geqslant f_0.$$

Il existe donc la borne inférieure exacte

$$M_{\alpha,\delta}=\inf_{z\in\tilde{F}} M^\alpha[z, f_\delta].$$

Nous dirons de l'élément $z_{\alpha,\delta}$ qu'il est *presque minimisant* pour la fonctionnelle $M^\alpha[z, f_\delta]$ si

$$M^\alpha[z_{\alpha,\delta}, f_\delta]\leqslant M_{\alpha,\delta}+\alpha\xi,$$

où $\xi=\xi(\alpha)$ et $0\leqslant\xi(\alpha)\leqslant\xi_0=\text{const}$.

Théorème 1. *Quel que soit $\varepsilon>0$, il existe un $\alpha_0=\alpha_0(\varepsilon)$ tel que pour tout élément $z_{\alpha,\delta}$ presque minimisant la fonctionnelle $M^\alpha[z, f_\delta]$ de paramètres $\alpha\leqslant\alpha_0(\varepsilon)$ et $\delta/\alpha\leqslant q<1$, est vérifiée l'inégalité*

$$\tilde{\rho}_{\tilde{F}}(z_{\alpha,\delta}, z_0)\leqslant\varepsilon$$

si la métrique dans $\tilde{F}$ est majorante par rapport à celle dans F.

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de montrer que, quelles que soient les suites de nombres $\{\alpha_n\}$ et $\{\delta_n\}$ convergeant vers zéro et telles que pour tout n on ait

$$\delta_n/\alpha_n \leqslant q < 1,$$

la suite $\{z_{\alpha_n, \delta_n}\}$ des éléments z_{α_n, δ_n} presque minimisant respectivement les fonctionnelles $M^{\alpha_n}[z, f_{\delta_n}]$ converge vers l'élément z_0. Il est évident que

$$M^{\alpha_n}[z_{\alpha_n, \delta_n}, f_{\delta_n}] = f_{\delta_n}[z_{\alpha_n, \delta_n}] + \alpha_n \Omega[z_{\alpha_n, \delta_n}] \leqslant$$
$$\leqslant M_{\alpha_n, \delta_n} + \alpha_n \xi_0 \leqslant f_{\delta_n}[z_0] + \alpha_n \Omega[z_0] + \alpha_n \xi_0.$$

A l'aide des inégalités

$$f_{\delta_n}[z] \geqslant f[z] - \delta_n \Omega[z],$$
$$f_{\delta_n}[z] \leqslant f[z] + \delta_n \Omega[z],$$

on trouve

$$f[z_{\alpha_n, \delta_n}] - \delta_n \Omega[z_{\alpha_n, \delta_n}] + \alpha_n \Omega[z_{\alpha_n, \delta_n}] \leqslant f[z_0] +$$
$$+ (\alpha_n + \delta_n) \Omega[z_0] + \alpha_n \xi_0. \qquad (7;\ 1,2)$$

Comme

$$f[z_{\alpha_n, \delta_n}] \geqslant f[z_0],$$

on tire de (7 ; 1,2)

$$(\alpha_n - \delta_n) \Omega[z_{\alpha_n, \delta_n}] \leqslant (\alpha_n + \delta_n) \Omega[z_0] + \alpha_n \xi_0.$$

Etant donné que $\delta_n \leqslant q\alpha_n$, on obtient en changeant δ_n en $q\alpha_n$

$$\Omega[z_{\alpha_n, \delta_n}] \leqslant \frac{1+q}{1-q} \Omega[z_0] + \frac{\xi_0}{1-q} = d_0.$$

Ainsi donc, tous les éléments de la suite $\{z_{\alpha_n, \delta_n}\}$ appartiennent à l'ensemble compact

$$\widetilde{F}_{d_0} \equiv \{z;\ z \in \widetilde{F},\ \Omega[z] \leqslant d_0\}.$$

Ensuite, il résulte de (7 ; 1,2) que

$$0 \leqslant f[z_{\alpha_n, \delta_n}] - f[z_0] \leqslant (\alpha_n + \delta_n) \Omega[z_0] + \alpha_n \xi_0, \qquad (7:\ 1,3)$$

car

$$\delta_n - \alpha_n \leqslant \alpha_n q - \alpha_n = \alpha_n (q-1) < 0.$$

Puisque α_n et δ_n tendent vers zéro quand $n \to \infty$, il découle de (7 ; 1,3) que la suite $\{z_{\alpha_n, \delta_n}\}$ est minimisante pour la fonctionnelle $f[z]$. D'autre part, puisqu'elle appartient à un ensemble compact $\widetilde{F}_{d_0}$, elle est régularisée et converge donc vers z_0, d'où le théorème.

5. Considérons le cas où $\widetilde{F}$ est un espace hilbertien. On parle d'une injection *s-compacte* et *continûment convexe* de $\widetilde{F}$ dans F si

a) les sphères

$$S_r \equiv \{z;\ z \in \widetilde{F},\ \|z\| \leqslant r\}$$

sont compactes dans F;

b) les suites $\{z_n^{(1)}\}$ et $\{z_n^{(2)}\}$ de points de F sont telles que $\rho_F(z_n^{(1)}, z_n^{(2)}) \to 0$ pour $n \to \infty$, on ait $\rho_F(z_n^{(1)}, \zeta_n) \to 0$ et $\rho_F(z_n^{(2)}, \zeta_n) \to \to 0$ pour $n \to \infty$, où $\zeta_n = 0{,}5\,(z_n^{(1)} + z_n^{(2)})$.

Si $\widetilde{F}$ est une injection *s*-compacte dans F et si $\varphi(q)$ est une fonction continue croissante non négative, la fonctionnelle de la forme

$$\Omega_1[z] = \varphi(\|z\|^2)$$

est stabilisante, comme il a été indiqué au p. 2 ci-dessus.

Soit $f_\delta[z]$ une δ-approximation de la fonctionnelle $f[z]$ par rapport à la fonctionnelle stabilisante

$$\Omega_1[z] = \varphi(\|z\|^2).$$

Pour $\delta < \alpha$ il existe une borne inférieure exacte $M^1_{\alpha,\delta}$ de la fonctionnelle

$$M_1^\alpha[z, f_\delta] = f_\delta[z] + \alpha\Omega_1[z]$$

sur l'ensemble $\widetilde{F}$, c'est-à-dire que

$$M^1_{\alpha,\delta} = \inf_{z \in \widetilde{F}} M_1^\alpha[z, f_\delta].$$

Théorème 2. *Etant donné une injection s-compacte et continûment convexe d'un espace hilbertien $\widetilde{F}$ dans F, il existe un élément $z_{\alpha,\delta} \in \widetilde{F}$ minimisant la fonctionnelle*

$$M_1^\alpha[z, f_\delta]$$

si $\delta/\alpha \leqslant q < 1$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\{z_n\}$ une suite minimisant la fonctionnelle $M_1^\alpha[z, f_\delta]$ de telle façon que la suite $\{M_1^\alpha[z_n, f_\delta]\}$ converge vers $M^1_{\alpha,\delta}$. Sans restreindre la généralité, on peut considérer que cette suite est décroissante, si bien que pour tout n on a

$$M_1^\alpha[z_1, f_\delta] \geqslant f_\delta[z_n] + \alpha\Omega_1[z_n] \geqslant f_\delta[z_n] + (\alpha - \delta)\,\Omega_1[z_n].$$

D'où

$$\Omega_1[z_n] = \varphi(\|z_n\|^2) \leqslant \frac{1}{\alpha(1-q)}\{M_1^\alpha[z_1, f_\delta] - f[z_n]\}.$$

Puisque $f[z_n] \geqslant f[z_0]$, où z_0 est l'élément sur lequel la fonctionnelle $f[z]$ atteint sa valeur minimale, alors

$$\varphi(\|z_n\|^2) \leqslant \frac{1}{\alpha(1-q)} \{M_1^\alpha[z_1, f_\delta] - f[z_0]\} = C_1,$$

où la constante C_1 est indépendante de n. Il s'ensuit que pour tout n

$$\|z_n\| \leqslant C_2,$$

où C_2 est une constante indépendante de n. Ainsi donc, $\{z_n\} \subset S_r$ pour $r = C_2$. Les sphères S_r étant par hypothèse compactes dans F, la suite $\{z_n\}$ est aussi compacte dans F. Sans changer les notations, nous admettrons qu'elle converge (dans la métrique de F) vers un élément $\bar{z} \in F$.

Montrons qu'elle converge fortement vers l'élément $\tilde{z} \in \tilde{F}$. A cette fin nous montrerons qu'elle est fondamentale dans $\tilde{F}$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $n(\varepsilon)$ tel que pour $n \geqslant n(\varepsilon)$ et pour tout $p > 0$ on a

$$\|z_{n+p} - z_n\| \leqslant \varepsilon.$$

Admettons que ce soit faux. Il existe alors un ε_0 et des suites d'indices $\{n_k\}$ et $\{m_k\}$ (où $m_k = n_k + p$) tels que

$$\|z_{m_k} - z_{n_k}\| \geqslant \varepsilon_0.$$

Soit

$$\xi_k = 0{,}5\,(z_{m_k} - z_{n_k}).$$

Alors

$$\zeta_k = 0{,}5\,(z_{m_k} + z_{n_k}) = z_{n_k} + \xi_k = z_{m_k} - \xi_k.$$

Du moment que z_{n_k} et z_{m_k} sont éléments de la suite $\{z_n\}$ minimisant la fonctionnelle $M_1^\alpha[z, f_\delta]$ et que la suite

$$\{M_1^\alpha[z_n, f_\delta]\}$$

est décroissante, il est évident que pour un k suffisamment grand on a

$$f_\delta[\zeta_k] + \alpha\varphi(\|\zeta_k\|^2) - \{f_\delta[z_{n_k}] + \alpha\varphi(\|z_{n_k}\|^2)\} \geqslant -\varepsilon_k'$$

et

$$f_\delta[\zeta_k] + \alpha\varphi(\|\zeta_k\|^2) - \{f_\delta[z_{m_k}] + \alpha\varphi(\|z_{m_k}\|^2)\} \geqslant \varepsilon_k'',$$

où ε_k' et $\varepsilon_k'' \to 0$ pour $k \to \infty$.

Vu que l'injection de $\tilde{F}$ dans F est continûment convexe, on a

$$\lim_{k\to\infty} f_\delta[z_{n_k}] = \lim_{k\to\infty} f_\delta[z_{m_k}] = \lim_{k\to\infty} f_\delta[\zeta_k]$$

et

$$\varphi(\|\zeta_k\|^2) - \varphi(\|z_{n_k}\|^2) \geqslant -\bar{\varepsilon}_k',$$
$$\varphi(\|\zeta_k\|^2) - \varphi(\|z_{m_k}\|^2) \geqslant \bar{\varepsilon}_k'', \qquad (7;\ 1,4)$$

où $\bar{\varepsilon}_k'$ et $\bar{\varepsilon}_k'' \to 0$ pour $k \to \infty$.

Etant donné que $\varphi(\|z\|^2)$ est une fonction croissante uniformément continue dans le domaine $\|z\| \leqslant C_2$, il résulte de (7 ; 1,4) que

$$\{\|z_{n_k}\|^2 + 2(z_{n_k}, \xi_k) + \|\xi_k\|^2\} - \|z_{n_k}\|^2 \geqslant -\beta_k'$$

et

$$\{\|z_{m_k}\|^2 - 2(z_{m_k}, \xi_k) + \|\xi_k\|^2\} - \|z_{m_k}\|^2 \geqslant -\beta_k'',$$

où β_k' et $\beta_k'' \to 0$ pour $k \to \infty$.

Il en découle que

$$2\|\xi_k\|^2 - 2(z_{m_k} - z_{n_k}, \xi_k) = -2\|\xi_k\|^2 \geqslant -(\beta_k' + \beta_k''),$$

ou que

$$\|\xi_k\|^2 \leqslant 0{,}5(\beta_k' + \beta_k'') \to 0 \text{ pour } k \to \infty,$$

ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle

$$\|\xi_k\| = 0{,}5\|z_{m_k} - z_{n_k}\| \geqslant 0{,}5 \cdot \varepsilon_0.$$

Ainsi donc, la suite $\{z_n\}$ est fondamentale dans $\tilde{F}$ et fortement convergeante vers un élément $\tilde{z} \in \tilde{F}$. Comme la métrique dans $\tilde{F}$ est majorante par rapport à celle dans F, on a $\tilde{z} = \bar{z}$. Il est évident que c'est bien sur l'élément $z_{\alpha,\delta} = \bar{z} = \tilde{z}$ que la fonctionnelle $M_1[z, f_\delta]$ atteint sa valeur minimale. Le théorème est démontré.

§ 2. Méthode stable de résolution des problèmes de commande optimale

1. Soit donné un système d'équations

$$dx/dt = F(t, x, u), \qquad (7;\ 2,1)$$

où $x(t) = \{x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)\}$ est une fonction vecteur d'un espace à n dimensions définie sur l'intervalle $t_0 \leqslant t \leqslant T$, et soit $u(t) = \{u^1(t), u^2(t), \ldots, u^m(t)\}$ une fonction vecteur de commande d'un espace métrique complet U à m dimensions. Nous allons considérer les solutions du système (7 ; 2,1) vérifiant les conditions

$$x(t_0) = x_0, \qquad (7;\ 2,2)$$

où x_0 est un vecteur donné.

Nous examinerons la classe des problèmes de commande optimale dans lesquels la fonctionnelle objectif ne dépend que des variables de phase.

Soit donnée une fonctionnelle continue non négative $f[x]$ définie sur les solutions du problème (7 ; 2,1), (7 ; 2,2). Puisque ces solutions dépendent de u, $x = x_u(t)$, la fonctionnelle $f[x_u(t)] = \Phi[u]$ est définie sur U. Proposons-nous de chercher une commande $u_0(t)$ qui minimise la fonctionnelle $\Phi[z]$ (problème U). Cette commande sera dite optimale. Il a été indiqué plus haut que ce problème n'est pas bien posé. Supposons qu'il existe dans l'espace U une commande optimale $u_0(t)$.

Dans ce paragraphe, nous donnons une méthode stable de recherche approchée de $u_0(t)$ basée sur l'idée de la régularisation, comme dans [172]. Comme il a été indiqué plus haut, pour obtenir cette méthode il suffit d'avoir un algorithme de construction des suites minimisantes $\{u_n(t)\}$ convergeant vers la fonction $u_0(t)$.

2. Considérons la fonctionnelle lissante

$$B^\alpha[u] = \Phi[u] + \alpha\Omega[u],$$

où $\Omega[u]$ est une fonctionnelle stabilisante. La fonctionnelle $B^\alpha[u]$ est non négative; il existe donc sur U sa borne inférieure B_0^α:

$$B_0^\alpha = \inf_{u\in U} B^\alpha[u].$$

Soit U_1 un sous-ensemble de l'ensemble U admettant une métrisation $\rho_1(u_1, u_2)$ majorante par rapport à celle de U.

Posons $\Omega_1[u] = \rho_1^2(u, \bar{u}_0)$, $B_1^\alpha[u] = \Phi[u] + \alpha\Omega_1$ et $B_{01}^\alpha = \inf_{u\in U} B_1^\alpha[u]$, où $\bar{u}_0$ est un élément quelconque fixé de U_1. Soit $\{\alpha_n\}$ une suite décroissante de nombres positifs convergeant vers zéro ($\alpha_n \to 0$), et soit $\{u_{\alpha_k}(t)\}$ une suite des commandes dans U_1. On a le

Théorème 1. *Si le problème U n'admet qu'une seule commande optimale $u_0(t)$ appartenant à l'ensemble U_1, alors la suite des fonctions $\{u_{\alpha_k}(t)\}$ vérifiant les inégalités*

$$B^{\alpha_k}[u_{\alpha_k}(t)] \leqslant B_{01}^{\alpha_k} + \alpha_k C,$$

où C est une constante indépendante de α, converge vers $u_0(t)$ dans la métrique de U.

Si U_1 est un espace hilbertien, on a le

Théorème 2. *Etant donné une injection s-compacte et continûment convexe de U_1 (de métrique $\rho_1(u_1, u_2)$) dans U, il existe un élément $u_\alpha(t) \in U_1$ qui minimise la fonctionnelle $B_1^\alpha[u]$.*

Les démonstrations de ces deux théorèmes sont parfaitement analogues à celles des théorèmes 1 et 2 respectivement du § 1, aussi omettrons-nous de les donner ici.

De ces théorèmes on déduit immédiatement une méthode stable de recherche approchée de la commande optimale.

Exemple. Considérons un problème modèle de l'ascension verticale d'une fusée-sonde dans une atmosphère homogène à l'altitude maximale [31, 32], problème dont on connaît la solution exacte [127].

Le mouvement vertical d'un corps de masse variable $m(t)$ dans une atmosphère homogène se laisse décrire par un système d'équations

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{m(t)}[au(t)-cv^2(t)]-g,\quad \frac{dm}{dt}=-u(t)$$

assujetti aux conditions initiales $m(0)=m_0$, $v(0)=v_0$. Ici $m(t)$ est la masse variable du corps ($m_0 \geqslant m(t) \geqslant \mu$, μ étant la masse du corps de la fusée), $v(t)$ la vitesse du corps, $u(t)$ la fonction de commande égale à la diminution de la masse (consommation du combustible) pendant une seconde de vol ; a, c, g sont des constantes: $a = 2500$ m/s est la vitesse relative de projection des gaz, $c = 0{,}2\cdot 10^{-7}$ kg·s/m le coefficient balistique généralisé de résistance de l'air, $g = 9{,}81$ m/s^2 l'accélération de la pesanteur.

Les solutions approchées de ce problème, même grossières, accusent un saut prononcé au moment initial ($t = 0$), c'est-à-dire qu'elles ont une particularité du type δ. Aussi est-il naturel de chercher la solution sous la forme $u_1 = A\delta(t) + u(t)$, où A est une constante et $\delta(t)$, la fonction delta de Dirac. La fonction inconnue $u(t)$ sera alors continue et suffisamment lisse. La recherche numérique de cette fonction sera de loin plus facile que celle d'une fonction à singularité du type δ. Présentée de cette manière, la solution doit être interprétée en ce sens que pour atteindre l'altitude maximale, il y a intérêt à brûler une certaine quantité de combustible instantanément et qu'une fois une certaine vitesse v_1^* atteinte, la masse restante de combustible doit se consommer de façon progressive. Il est évident que la fonction de commande optimale $\tilde{u}(t)$ doit être positive sur un certain intervalle $0 \leqslant t \leqslant T_1^*$ et devenir égale à zéro pour $t > T_1^*$. Il s'agit de déterminer $\tilde{u}(t)$ et les paramètres v_1^* et T_1^*.

Nous avons donc à considérer une fonctionnelle objectif biparamétrique $f[u, v_1, T_1]$, qu'il s'agit de minimiser pour trouver $\tilde{u}(t)$ et v_1^*, T_1^*.

Conformément à la formule de Tsiolkovski, la masse de combustible m_1 qui doit être consommée instantanément pour développer

la vitesse v_1 se déduit de la relation

$$v_1 = v_0 + a \left| \ln \left(1 - \frac{m_1}{m_0} \right) \right|.$$

A est trouvé d'après m_1. Dans la suite on pose $v_0 = 0$, $m_0 = 1$.

L'altitude $H = H[v(u)]$ atteinte par la fusée est égale à l'intégrale $\int_0^T v(t)\,dt$, où T est l'instant de vitesse nulle, $v(T) = 0$. Elle peut être mise sous la forme $H = H_1 + \Delta H$, où

$$H_1 = \int_0^{T_1} v(t)\,dt, \quad \Delta H = \frac{\mu}{2c} \ln \left(1 + \frac{v_\mu^2 c}{\mu g} \right),$$

v_μ étant la vitesse de la fusée au moment où la combustion prend fin $(t = T_1)$.

Prenons comme fonctionnelle objectif

$$f[u, v_1, T_1] = 1 - \frac{H[v(u)]}{H_0},$$

où H_0 est un nombre proche de l'altitude maximale cherchée. Le problème de minimisation de cette fonctionnelle étant instable, nous allons le résoudre par la méthode de régularisation.

Pour la recherche d'une solution approchée (régularisée), nous prenons une fonctionnelle stabilisante $\Omega[u]$ de la forme

$$\Omega[u] = \int_0^T (u'')^2\,dt.$$

Le problème se réduit à la minimisation de la fonctionnelle

$$\Phi^\alpha[u, v_1, T_1] = f[u, v_1, T_1] + \alpha\Omega[u]$$

pour les conditions supplémentaires

$$u(t) \geqslant 0, \quad \int_0^T u(t)\,dt = 1 - \mu.$$

La procédure de la recherche de la solution approchée de ce problème pour α fixé est la suivante: on se donne une suite de couples de nombres $\{v_1^{(n)}, T_1^{(n)}\}$; pour chacun des couples $v_1^{(n)}$, $T_1^{(n)}$, on trouve la fonction $u_n^\alpha(t)$ qui minimise la fonctionnelle $\Phi^{(\alpha)}[u, v_1^{(n)}, T_1^{(n)}]$. Puis, dans la suite $\{v_1^{(n)}, T_1^{(n)}\}$, on trouve le couple v_1^*, T_1^* sur lequel la fonctionnelle $\Phi^\alpha[u_n^\alpha(t), v_1^{(n)}, T_1^{(n)}]$ passe par le minimum.

Pour des valeurs élevées de α (de l'ordre de 10^5), le minimum de la fonctionnelle $\Phi^\alpha[u, v_1, T_1]$ est atteint sur des fonctions sen-

siblement constantes. Lorsque les valeurs de α sont petites ($\alpha < 0{,}1$), la solution est très influencée même par des petites erreurs accidentelles de calcul. La commande optimale approchée représentée sur la figure 9 en pointillé est obtenue pour $\alpha = 10^3$, $v_1 = 9931{,}721$ m/s,

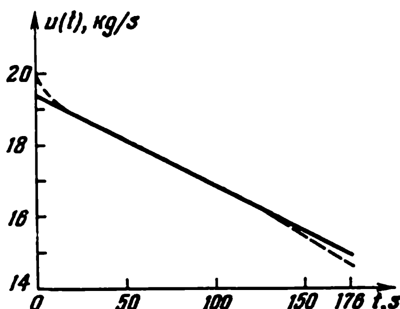


Fig. 9

$T_1 = 176$ s et $\mu = 0{,}7$; en continu est montrée la commande optimale exacte. H et H_1 prennent les valeurs résumées dans le tableau ci-après.

Solution exacte	Solution approchée
$H_1 = 0{,}16507 \cdot 10^7$ m	$H_1 = 0{,}16514 \cdot 10^7$ m
$H = 0{,}51496 \cdot 10^7$ m	$H = 0{,}51497 \cdot 10^7$ m

Le minimum de la fonctionnelle $\Phi^\alpha[u, v_1, T_1]$ a été cherché par la méthode de projection du gradient.

3. Examinons un des problèmes de grande importance pratique dans lesquels on demande de minimiser une fonctionnelle.

Problème inverse de la théorie des antennes. Considérons une antenne linéaire réalisée sous la forme d'une tige rectiligne de longueur $2l$. Dirigeons l'axe de la variable z le long de la tige.

Supposons qu'on ait induit dans cette tige, au moyen d'un appareil approprié, un courant d'amplitude $j(z)$ qui varie avec le temps suivant la loi $e^{i\omega t}$. Ce courant fait naître dans l'espace entourant la tige un champ électromagnétique symétrique par rapport à l'axe des z. Les intensités des champs électrique et magnétique engendrés par le courant $j(z)$ et l'intensité du rayonnement de l'antenne sont déterminées par ce courant, c'est-à-dire qu'elles représentent des fonctionnelles $A_E[j]$, $A_H[j]$ et $A_M[j]$.

Si l'on matérialise dans un plan Q passant par l'axe de la tige une circonférence d'un rayon R suffisamment grand (très supérieur

à la longueur d'onde λ et à la longueur de la tige $2l$) et de centre dans le point milieu de la tige, alors le vecteur intensité du champ magnétique aura en tout point de cette circonférence la même direction, perpendiculaire au plan Q. La grandeur de ce vecteur sera fonction du rayon R et de l'angle θ entre l'axe des z et la droite dirigée du centre de la tige au point de réception, tandis que ses valeurs relatives (rapportées par exemple à sa valeur en un point quelconque de la circonférence) ne seront fonction $P(\theta)$ que du seul angle θ, en sorte que

$$A[j] = P(\theta).$$

La fonction $P(\theta)$ s'appelle *diagramme directionnel de l'antenne* (suivant l'intensité du champ magnétique; de manière analogue se définissent les diagrammes suivant l'intensité du champ électrique et suivant le flux de rayonnement).

Dans le cas où l'antenne a une configuration plus compliquée, son diagramme directionnel $A[\vec{j}]$ sera en général une fonction vectorielle des deux coordonnées sphériques θ et φ du point de réception:

$$A[\vec{j}] = \vec{P}(\theta, \varphi).$$

Quand l'antenne est linéaire de longueur $2l$, la relation entre le courant $j(z)$ et le diagramme directionnel $P(\theta)$ s'exprime par la formule (voir [177])

$$A[j] \equiv \sin\theta \int_{-l}^{l} j(z)\, e^{-ikz\cos\theta}\, dz = P(\theta), \qquad (7\,;\ 2{,}3)$$

où $k = \omega/c$ est le nombre d'onde, c la vitesse de la lumière.

Le problème direct de la théorie des antennes consiste à déterminer le diagramme directionnel $\vec{P}(\theta, \varphi)$ à partir du courant donné $\vec{j}(M)$, c'est-à-dire à calculer la fonction $\vec{P}(\theta, \varphi) = A[\vec{j}]$.

Par problème inverse, on entend généralement le problème de recherche de la répartition du courant $\vec{j}(M)$ telle qu'elle détermine le diagramme directionnel désiré $\vec{P}(\theta, \varphi)$. Pour le cas de l'antenne linéaire, ce problème se ramène à la résolution de l'équation intégrale de Fredholm de première espèce (7 ; 2,3) par rapport à $j(z)$. On sait que ce problème est mal posé. Il est à noter que l'équation (7 ; 2,3) n'a de solution que pour une classe restreinte des seconds membres $P(\theta)$, seulement pour des diagrammes directionnels *réalisables*; or, les diagrammes exigés n'appartiennent généralement pas à cette classe. En outre, dans la pratique, la répartition du courant $\vec{j}(M)$ est assujettie à toute une série d'exigences et contraintes (par exemple, l'intensité du courant et sa dérivée doivent être bornées; la puissance réactive doit être minimale, etc.), impossibles à prendre

en considération lors de la résolution de l'équation (7 ; 2,3). D'autre part, au diagramme directionnel sont aussi imposées certaines conditions supplémentaires; ainsi, le diagramme à réaliser doit être proche d'un diagramme théorique, différent de zéro à l'intérieur d'un secteur fixé et égal à zéro en dehors de cet intervalle (cas d'une émission radio strictement dirigée); la puissance maximale doit être atteinte dans le lobe principal; l'énergie dans les lobes secondaires doit être minimale, et ainsi de suite. Pour cette raison, il est plus rationnel de poser le problème inverse de la théorie des antennes d'une façon différente.

Soient $\Phi_i [\vec{P}(\theta, \varphi)]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, des fonctionnelles telles que la i-ième fonctionnelle est définie sur les fonctions $\vec{P}(\theta, \varphi)$ vérifiant la i-ième exigence (condition) imposée aux diagrammes directionnels.

Soient ensuite $\Psi_k [\vec{j}(M)]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, des fonctionnelles telles que chacune d'elles est définie sur les fonctions $\vec{j}(M)$ vérifiant une condition imposée à la répartition du courant. Ces fonctionnelles caractérisent la complexité de la construction.

Considérons les fonctionnelles $\Psi[\vec{j}] = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \Psi_k [\vec{j}]$ et $\Phi[\vec{P}] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \Phi_i [\vec{P}]$, ($\gamma_k$ et β_i positifs), dans lesquelles les facteurs de pondération γ_k et β_i sont choisis conformément à l'importance et à l'influence des conditions correspondantes imposées à la répartition du courant et aux diagrammes directionnels. La fonctionnelle $\Phi[\vec{P}]$ est définie sur les fonctions vérifiant toutes les exigences imposées aux diagrammes directionnels; la fonctionnelle $\Psi[\vec{j}]$ l'est sur les fonctions $\vec{j}(M)$ vérifiant toutes les conditions imposées aux répartitions des courants.

Nous considérons donc comme solution approchée du problème inverse de la théorie des antennes (comme dans [177]) le courant $\vec{j}(M)$ réalisant le minimum de la fonctionnelle Φ sous la condition $\Psi \leqslant \Psi_0$, ou de la fonctionnelle

$$\Phi[A[\vec{j}]] + \delta\Psi[\vec{j}],$$

où δ est un facteur numérique caractérisant l'influence des contraintes imposées à la répartition du courant. Les problèmes de minimisation de pareilles fonctionnelles ont été étudiés plus haut.

Pour s'assurer que les paramètres trouvés sont optimaux, on effectue en général un calcul expérimental.

Le problème que l'on vient de considérer est typique pour les projets des systèmes optimaux ou des constructions optimales.

CHAPITRE VIII

METHODES STABLES DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE PLANIFICATION OPTIMALE (DE PROGRAMMATION LINÉAIRE)

Beaucoup de problèmes de planification optimale et de programmation mathématique (linéaire et non linéaire) sont instables: de faibles variations des données initiales peuvent entraîner des variations importantes, et même aussi grandes que l'on veut, de la solution. Au fait, dans ces problèmes, la solution est mal définie. Cet état de choses résulte de la position incorrecte du problème. Pour les applications, il est très important de pouvoir préciser le problème, car les méthodes mathématiques utilisées dans la planification (dans la mise au point des plans optimaux) sont essentiellement basées sur la résolution de pareils problèmes.

Une importance primordiale est attachée à l'étude des méthodes de recherche des « solutions » de ces problèmes, stables vis-à-vis de faibles variations des données initiales.

Le chapitre qui commence est consacré justement à ces questions. Au § 1 nous discutons la position des problèmes de planification optimale et de programmation mathématique (y compris la programmation linéaire) en montrant leur instabilité. La notion de solution normale est introduite. Aux paragraphes suivants sont considérées les questions d'existence et d'unicité de la solution, ainsi que les méthodes, basées sur l'idée de la régularisation (voir ch. II), de recherche des solutions approchées stables vis-à-vis de faibles variations des données initiales.

§ 1. Sur la position des problèmes de planification optimale et de programmation mathématique

1. Citons la formulation classique d'un problème typique de planification optimale.

Soit z_j le programme actuel de fabrication d'articles de j-ième dénomination, $1 \leqslant j \leqslant n$; α_j est le programme maximal d'articles de j-ième dénomination; c_j est le temps total nécessaire à la fabrication d'un article de j-ième dénomination sur tous les groupes principaux d'équipement. Alors le produit scalaire $\varphi_1(z) = (c, z)$ des

vecteurs $c = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ et $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ caractérise le chargement (l'occupation) de l'équipement pour le plan de production z. Soient ensuite b_i le temps de disponibilité du i-ième groupe d'équipement, $1 \leqslant i \leqslant m$; a_{ij} le temps de fabrication du j-ième article sur le i-ième groupe d'équipement.

Désignons par G l'ensemble des vecteurs z (plans) vérifiant les conditions: $b - Az \geqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant \alpha$, où α et b sont des vecteurs $b = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ et $A \equiv \{a_{ij}\}$, la matrice d'éléments a_{ij}.

Mettre au point un plan optimal $\bar{z}$, c'est trouver sur l'ensemble des vecteurs (plans) G un vecteur $\bar{z}$ tel que le chargement de l'équipement soit maximal, c'est-à-dire que

$$\max_{z \in G} \varphi_1(z) = \varphi_1(\bar{z}).$$

La fonction $\varphi(z)$ est dite *fonction objectif* du problème.

Dans [178] sont cités des plans de production trimestriels optimaux d'une usine, calculés avec différente précision donnée d'éléments initiaux. Les résultats des calculs sont résumés dans le tableau 1; les chiffres romains désignent les variantes des solutions correspondant aux diverses données initiales, et les chiffres arabes, les composantes des solutions (vecteurs $\bar{z}$). Regardant ce tableau, on remarque que pour des valeurs sensiblement égales optimales de la fonction objectif $\varphi(\bar{z})$ (les variations étant de l'ordre de 1 %), le nombre d'articles à produire d'après ces plans optimaux varie pour certaines dénominations dans les limites de quelques centaines. Ce problème est donc instable.

2. Les problèmes de planification optimale sont un cas particulier des problèmes de programmation linéaire ou, plus généralement, des problèmes de programmation mathématique.

Soient R^n un espace à n dimensions des vecteurs $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$; $g(z)$ et $h(z)$ deux fonctions vecteurs définies sur R^n:

$$g(z) = \{g_1(z), g_2(z), \ldots, g_p(z)\},$$
$$h(z) = \{h_{p+1}(z), h_{p+2}(z), \ldots, h_m(z)\} \quad (p < m),$$

où $g_i(z)$ et $h_j(z)$ sont des fonctions scalaires.

Désignons par G l'ensemble des vecteurs z de l'espace R^n pour lesquels $g(z) \geqslant 0$ et $h(z) = 0$, c'est-à-dire que

$$G \equiv \{z;\ g(z) \geqslant 0,\quad h(z) = 0\}.$$

Soit $\varphi(z)$ une fonction scalaire donnée.

Tableau 1

$\bar{z}$	I	II	III	IV	V	VI	VII	VI'I	IX	X	XI
1	614	590	596	765	638	507	469	446	373	642	383
2	638	634	634	684	644	611	604	548	583	444	581
3	418	424	423	376	412	446	555	479	479	479	479
4						49	49				
5	66			36		105		66		232	238
6		36					60		106		
7								105			
10			56								
11											
12	296	297	294	314	298	293	295	291	255	286	237
13	50	49	50		47	61	59	69	68	68	78
14									54		72
$\varphi(z)$ en milliers de roubles	2391	2390	2390	2388	2387	2382	2380	2376	2373	2371	2370

Le problème de programmation mathématique consiste à rechercher sur R^n un vecteur $\tilde{z}$ qui minimise la fonction $\varphi(z)$ sur l'ensemble G, c'est-à-dire un vecteur tel que

$$\varphi(\tilde{z}) = \min_{z \in G} \varphi(z). \qquad (8;\ 1,1)$$

La fonction $\varphi(z)$ est dite *fonction objectif* du problème (8; 1,1).

Si les fonctions $\varphi(z)$, $g(z)$ et $h(z)$ du problème de programmation mathématique sont linéaires, on dit que c'est un problème de *programmation linéaire*. En règle générale, les problèmes de planification optimale sont des problèmes de programmation linéaire.

3. En pratique, l'information sur les fonctions $\varphi(z)$, $g(z)$ et $h(z)$ a un caractère approximatif. Si, par exemple, ces fonctions sont définies avec une erreur, ceci signifie qu'au lieu de $\varphi(z)$, $g(z)$ et $h(z)$, on est en droit de prendre des fonctions quelconques $\varphi_\delta(z)$, $g_\delta(z)$ et $h_\delta(z)$ telles que

$$\|\varphi_\delta(z) - \varphi(z)\| \leqslant \delta, \quad \|g_\delta(z) - g(z)\| \leqslant \delta,$$
$$\|h_\delta(z) - h(z)\| \leqslant \delta\ ^*).$$

Par ailleurs le choix des fonctions $\varphi_\delta(z)$, $g_\delta(z)$ et $h_\delta(z)$ dans l'ensemble

$$Q_\delta(\varphi, g, h) \equiv \{(\varphi_\delta, g_\delta, h_\delta):\ \|\varphi_\delta - \varphi\| \leqslant \delta,$$
$$\|g_\delta - g\| \leqslant \delta, \quad \|h_\delta - h\| \leqslant \delta\}$$

se fait, généralement, de façon arbitraire.

Ainsi donc, la solution du problème initial (8; 1,1) ne peut être appréciée qu'à travers l'appréciation de celle du problème approché:

$$\min_{z \in G_\delta} \varphi_\delta(z), \qquad (8;\ 1,2)$$

avec $G_\delta \equiv \{z;\ g_\delta(z) \geqslant 0,\ h_\delta(z) = 0\}$, choisi au hasard dans la classe des problèmes approchés définis par Q_δ.

4. Soit $H_\delta(\varphi, g, h)$ l'ensemble des solutions z_δ des problèmes du type (8; 1,2) pour toutes les fonctions $(\varphi_\delta, g_\delta, h_\delta) \in Q_\delta$. On dit que le problème (8; 1,1) est *stable* si

$$\Delta_\delta = \sup_{z'_\delta,\ z''_\delta \in H_\delta} \|z'_\delta - z''_\delta\| \to 0 \text{ pour } \delta \to 0.$$

Par contre, s'il existe un nombre $B > 0$ tel que pour $\delta > 0$ on trouve deux triplets de fonctions $(\varphi'_\delta, g'_\delta, h'_\delta)$ et $(\varphi''_\delta, g''_\delta, h''_\delta)$ sur Q_δ

---

*) Pour simplifier l'écriture, on a pris la même valeur de δ pour toutes les trois fonctions φ, g, h. En réalité, l'erreur est estimée par les vecteurs $\delta' = (\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_p, \delta'_{p+1}, \ldots, \delta'_m)$ et $\delta'' = (\delta''_1, \delta''_2, \ldots, \delta''_n)$ munis de normes convenablement choisies.

et les solutions correspondantes du problème (8; 1,2) z'_δ et z''_δ pour lesquelles

$$\|z'_\delta - z''_\delta\| \geqslant B,$$

on dit que le problème (8; 1,1) est *instable*.

Les problèmes instables de planification optimale et de programmation mathématique peuvent naturellement être appelés aussi problèmes *mal posés*. Il est évident que les solutions exactes z'_δ et z''_δ du problème (8; 1,1) mal posé à données initiales approchées (φ'_δ, g'_δ, h'_δ) et (φ''_δ, g''_δ, h''_δ) n'apportent pas l'information suffisante sur la solution du problème initial.

Ainsi donc, avec les solutions exactes des problèmes de cette espèce on ne peut pas être sûr d'avoir les solutions exactes des problèmes de planification optimale à données initiales approchées.

On rencontre souvent une telle situation lors des calculs suivant diverses méthodes de résolution numérique des problèmes de programmation mathématique. Notons par ailleurs que, malgré les différences notables des solutions z'_δ et z''_δ, il peut arriver que les valeurs des fonctions objectifs $\varphi'_\delta(z'_\delta)$ et $\varphi''_\delta(z''_\delta)$ soient peu différentes. Ce cas est justement illustré par le tableau 1.

§ 2. Problèmes de planification optimale. Existence et unicité de la solution

1. Soient donnés une matrice $A \equiv \{a_{ij}\}$ d'éléments a_{ij} et des vecteurs $\bar{u} = \{\bar{u}_i\}$ et $c = \{c_j\}$, $c_j \geqslant 0$, où $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Examinons le problème suivant de planification optimale.

On demande de trouver, sur un ensemble G de vecteurs (éléments) $z = \{z_j\}$ appartenant à un espace R^n à n dimensions et vérifiant les conditions

$$Az = \bar{u}, \tag{8; 2,1}$$

$$z_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{8; 2,2}$$

un élément (vecteur) $\bar{z} = \{\bar{z}_j\}$ tel qu'il minimise la fonction

$$\varphi(z) = (c, z) = \sum_{j=1}^{n} c_j z_j, \tag{8; 2,3}$$

c'est-à-dire tel que

$$\varphi(\bar{z}) = \min_{z \in G} \varphi(z). \tag{8; 2,4}$$

Il s'agit évidemment d'un problème de programmation linéaire.

Ici $g(z) = z$, $h(z) = Az - \bar{u}$.

2. Si dans la condition (dans le système d'équations) $Az = \bar{u}$ les lignes sont linéairement dépendantes, le problème (8; 2,1) à

(8 ; 2,3) est généralement mal posé. Dans la plupart des cas, on admet que les lignes des conditions proposées sont linéairement indépendantes. Or, étant donné l'imprécision des données initiales, cette hypothèse est pratiquement impossible à vérifier. Aussi, dans la suite, se refusera-t-on à faire l'hypothèse de l'indépendance linéaire des conditions proposées, de sorte que seuls seront considérés les problèmes mal posés de la forme (8 ; 2,4).

Démontrons l'existence de la solution de pareils problèmes.

Théorème 1. *Si les conditions* (8 ; 2,1) *et* (8 ; 2,2) *sont compatibles, le problème* (8 ; 2,1) *à* (8 ; 2,3) *admet au moins une solution.*

Démonstration. Soit $c_j > 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant j_0$ et $c_j = 0$ pour $j_0 < j \leqslant n$. Désignons par R_1 l'ensemble des vecteurs de l'espace R^n pour lesquels est vérifiée la condition (8 ; 2,2)

$$R_1 \equiv \{z;\ z_j \geqslant 0\},\quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Soit R_2 l'ensemble des vecteurs de l'espace R^n pour lesquels sont vérifiées les conditions (8 ; 2,1) et (8 ; 2,2) :

$$R_2 \equiv \{z;\ z \in R_1,\ Az = u\}.$$

D'après l'hypothèse de compatibilité des conditions (8 ; 2,1) et (8 ; 2,2), l'ensemble R_2 n'est pas vide.

Soit φ_0 la borne inférieure des valeurs de la fonction objectif $\varphi(z)$ de (8 ; 2,3) sur l'ensemble R_2 et soit $\{z^{(k)}\}$ une suite minimisante des points de R_2, c'est-à-dire telle que $\varphi(z^{(k)}) \to \varphi_0$ pour $k \to \infty$. On peut admettre évidemment que pour tout $k > 1$ on a $\varphi(z^{(k)}) \leqslant \leqslant \varphi(z^{(k-1)})$.

Puisque

$$\varphi(z^{(k)}) \leqslant \varphi(z^{(k-1)}),$$

on a pour $1 \leqslant j \leqslant j_0$

$$c_j z_j^{(k)} \leqslant \varphi(z^{(k)}) \leqslant \varphi(z^{(1)}).$$

Donc, pour $1 \leqslant j \leqslant j_0$, les coordonnées $z_j^{(k)}$ du vecteur $z^{(k}$ sont limitées :

$$z_j^{(k)} \leqslant \frac{\varphi(z^{(1)})}{c_j}.$$

Quels que soient des nombres positifs d_j, l'ensemble des points de l'espace R^{j_0} pour lesquels

$$0 \leqslant z_j \leqslant d_j,\quad 1 \leqslant j \leqslant j_0,$$

est compact dans R^{j_0}. La suite $\{\tilde{z}^{(k)}\}$ des vecteurs

$$\tilde{z}^{(k)} = \{z_j^{(k)}\},\quad 1 \leqslant j \leqslant j_0,\ k = 1\ 2, \ldots$$

de l'espace R^{j_0} appartient à un parallélépipède d'arêtes

$$d_j = \frac{\varphi(z^{(1)})}{c_j}.$$

On peut donc en extraire une sous-suite qui converge vers un certain vecteur $\tilde{z} \in R^{j_0}$. Posons, sans changer les notations, que

$$\lim_{k \to \infty} \tilde{z}^{(k)} = \tilde{z} = \{\tilde{z}_j\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant j_0.$$

Comme $\varphi(z)$ ne dépend que des j_0 premières coordonnées du vecteur z ($c_j = 0$ quand $j > j_0$), on a $\varphi(\tilde{z}) = \varphi_0$.

Considérons le système d'équations par rapport à z'' :

$$A''z'' = -A'z' + \bar{u}, \tag{8 ; 2,5}$$

où

$$z' = \{z_j\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant j_0, \quad z'' = \{z_j\}, \quad j_0 < j \leqslant n,$$

$$A' = \{a_{ij}\}, \ 1 \leqslant j \leqslant j_0, \ A'' = \{a_{ij}\}, \ j_0 < j \leqslant n, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Puisque le système

$$A''z'' = \bar{u} - A'\tilde{z}^{(k)}$$

est compatible (soit $z'' = z_2^{(k)}$ sa solution) et que le vecteur $u = \bar{u} - A'\tilde{z}^{(k)}$ vérifie toutes les relations linéaires auxquelles satisfont les lignes de la matrice A'', le système (8 ; 2,5) est compatible lui aussi. Il admet une solution distincte de zéro pour laquelle $z_j \geqslant 0$ ($j_0 < j \leqslant n$). En effet, s'il n'en est pas ainsi, la variété linéaire des éléments z'' pour lesquels $A''z'' = u$ se trouve séparée de l'ensemble $R_1'' \equiv \{z''; \ z_j \geqslant 0, \ j_0 < j \leqslant n\}$ d'une distance positive finie. Alors les variétés définies par les relations

$$A''z'' = \bar{u} - A'\tilde{z}^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

pour des k suffisamment élevés, se trouvent elles aussi à des distances finies de R_1''. Or, cela contredit le fait que $\tilde{z}^{(k)} \in R_1$.

Prenant une solution quelconque non nulle $z'' \in R_1''$ du système (8 ; 2,5) pour laquelle $z_j'' \geqslant 0$ ($j_0 < j \leqslant n$), on s'assure que le vecteur

$$\tilde{\tilde{z}} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_{j_0}, z_{j_0+1}'', \ldots, z_n'')$$

vérifie les conditions (8 ; 2,1) et (8 ; 2,2) et que $\varphi(\tilde{\tilde{z}}) = \varphi_0$. Le théorème est démontré.

L'exemple qui suit montre que la solution du problème (8 ; 2,1) à (8 ; 2,3) peut être non unique.

E x e m p l e 1. Soit $\varphi(z) = z_3$. La condition (8 ; 2,1) a la forme

$$z_1 - z_2 = 0.$$

Il est évident que le minimum de la fonction $\varphi(z) = z_3$ sur l'ensemble $R_1 \equiv \{z;\ z_j \geqslant 0;\ j = 1, 2, 3\}$ est égal à zéro et qu'il est atteint sur les points de la demi-droite $z_1 \geqslant 0$ définie par les équations

$$z_2 = z_1, \quad z_3 = 0.$$

3. Dans le cas où il y a plus d'une solution, il convient d'imposer des conditions supplémentaires à la solution cherchée pour que le problème soit déterminé.

Plaçons-nous dans le cas d'un problème de planification optimale. Supposons qu'un travail soit effectué conformément à un plan $z^{(0)}$ et qu'on demande de le modifier en raison du changement des données initiales. D'autres plans optimaux correspondent aux nouvelles données initiales. Parmi ces plans, il est naturel de choisir celui qui s'écarte le moins du plan primitif $z^{(0)}$, comme entraînant les moindres frais de réorganisation, si ces derniers n'ont pas été pris en considération au moment de la position du problème. On choisit la mesure de l'écart du plan nouveau $\bar{z}^{(0)}$ par rapport au plan ancien $z^{(0)}$ comme l'écart quadratique pondéré

$$\|\bar{z}^{(0)} - z^{(0)}\| = \{\sum_j p_j (\bar{z}_j^{(0)} - z_j^{(0)})^2\}^{1/2}$$

ou, plus généralement, comme une forme quadratique définie positive. Ceci posé, introduisons la définition suivante.

D é f i n i t i o n. Soit donné un vecteur $z^{(0)} \in R^n$. On dit que le vecteur $\bar{z}^{(0)}$ est la *solution normale* du problème (8 ; 2,1) à (8 ; 2,3) (relativement à $z^{(0)}$) si

$$\|\bar{z}^{(0)} - z^{(0)}\| \leqslant \|z - z^{(0)}\|,$$

où z est une solution quelconque du problème. Si le problème (8 ; 2,1) à (8 ; 2,3) admet une solution unique, celle-ci coïncide évidemment avec la solution normale. Si le problème admet plus d'une solution, l'existence de la solution normale est toujours évidente, car l'ensemble H sur les éléments (vecteurs) duquel la fonction $\varphi(z)$ passe par le minimum est fermé, étant la partie commune de trois ensembles fermés

$$\{z;\ Az = \bar{u}\}, \quad R_1 \equiv \{z;\ z_j \geqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots, n\}, \quad \{z;\ \varphi(z) = \varphi_0\}.$$

Théorème 2. *La solution normale du problème* (8 ; 2,1) à (8 ; 2,3) *est unique.*

D é m o n s t r a t i o n. Admettons qu'il existe deux solutions normales distinctes du problème considéré $z^{(1)}$ et $z^{(2)}$. Quelle que soit la quantité $\alpha > 0$, le vecteur

$$\hat{z} = \alpha z^{(1)} + \beta z^{(2)}, \quad \beta = 1 - \alpha,$$

vérifie la condition (8 ; 2,1) (en vertu de sa linéarité) et la condition (8 ; 2,2). En outre,

$$\varphi(\hat{z}) = \alpha\varphi(z^{(1)}) + \beta\varphi(z^{(2)}) = \alpha\varphi_0 + \beta\varphi_0 = \varphi_0.$$

Comme $z^{(1)}$ et $z^{(2)}$ sont deux solutions normales, on a

$$\| z^{(1)} - z^{(0)} \| = \| z^{(2)} - z^{(0)} \|.$$

D'autre part, pour $\alpha = 0,5$

$$\hat{z} = 0,5\,(z^{(1)} + z^{(2)})$$

et

$$\| \hat{z} - z^{(0)} \|^2 = \| z^{(1)} - z^{(0)} \|^2 - \| 0,5\,(z^{(1)} - z^{(2)} \|^2.$$

Donc,

$$\| \hat{z} - z^{(0)} \|^2 < \| z^{(1)} - z^{(0)} \|^2,$$

ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $z^{(1)}$ est la solution normale si $z^{(1)} \neq z^{(2)}$, d'où le théorème.

Il a été noté plus haut que la solution du problème (8 ; 2,1) à (8 ; 2,3) est généralement instable vis-à-vis de faibles variations de l'information initiale. Le paragraphe suivant est consacré à l'étude de la méthode stable de résolution de pareils problèmes: c'est la méthode de régularisation.

§ 3. Méthode de régularisation appliquée à la résolution de problèmes de planification optimale

1. Dans les problèmes de planification optimale, les données initiales sont généralement définies de façon approximative. Nous allons distinguer dans la suite deux espèces de problèmes, en les désignant sous les termes de *problème exact* (problème à résoudre) et de *problème approché* (problème qu'on se propose de résoudre au lieu du problème exact).

Le problème approché ne permet de juger ni de la stabilité du problème à résoudre, ni de l'unicité de la solution de ce dernier, même si le problème approché possède ces propriétés. Comme on l'a vu, la solution exacte du problème approché n'aide pas à se faire une idée sur la solution du problème à résoudre. Au point de vue de l'information disponible, on peut prendre en qualité de données initiales du problème à résoudre (problème exact) n'importe quelle collection de données initiales $\{\varphi, g, h\}$, pourvu que ces dernières vérifient les conditions

$$\| \varphi_\delta(z) - \varphi(z) \| \leqslant \delta, \quad \| h_\delta(z) - h(z) \| \leqslant \delta,$$
$$\| g_\delta(z) - g(z) \| \leqslant \delta. \qquad (8;\ 3,1)$$

Il est à noter qu'en ajoutant aux conditions $Az = u$ des équations linéairement dépendantes, on rend le problème instable (même s'il était stable), bien qu'il reste équivalent au problème initial au sens classique. Lorsqu'il s'agit d'un problème de programmation linéaire (de planification optimale) soumis à un assez grand nombre de conditions $Az = u$, on est le plus souvent dans l'impossibilité de vérifier pratiquement si la condition d'indépendance linéaire est remplie ou non.

On a donc besoin d'une méthode de résolution des problèmes de programmation linéaire (de planification optimale) telle qu'elle n'exige pas de faire l'hypothèse sur l'indépendance linéaire des conditions $Az = u$. Une telle méthode stable de recherche approchée de la solution normale du problème exact est décrite dans ce paragraphe.

2. Posons le problème de planification optimale comme un problème variationnel: on demande de chercher le minimum de la fonction $\varphi(z)$ ($\varphi(z) \geqslant 0$) ou, ce qui revient au même, de la fonction $\varphi^2(z)$ sur l'ensemble

$$G \equiv \{z;\ z \in R_1,\ Az = u\}.$$

Si $\varphi^2(z)$ est une fonctionnelle stabilisante pour cet ensemble, c'est-à-dire si l'ensemble G_d des éléments $z \in G$ pour lesquels $\varphi^2(z) \leqslant d$ est un compact, l'existence de l'élément z_0 réalisant le minimum de $\varphi(z)$ est évidente. Or, la fonction $\varphi^2(z)$ n'est pas toujours une fonctionnelle stabilisante, ainsi que le montre l'exemple considéré plus haut.

Arrêtons-nous sur la définition de la mesure de l'erreur sur la donnée de $\varphi(z)$. Soient données sur R^n une fonctionnelle stabilisante $\Omega[z]$ (par exemple $\Omega[z] = \sum_{i=1}^{n} p_i (z_i - z_i^0)^2$) et deux fonctions objectifs $\varphi(z)$ et $\tilde{\varphi}(z)$. Nous définissons la mesure de l'écart entre $\varphi^2(z)$ et $\tilde{\varphi}^2(z)$ comme le plus petit des nombres δ tels que

$$|\varphi^2(z) - \tilde{\varphi}^2(z)| \leqslant \delta(1 + \Omega[z]).$$

Pour les problèmes de programmation linéaire dans lesquels $\varphi^2(z)$ et $\tilde{\varphi}^2(z)$ sont des fonctionnelles quadratiques, cette définition est naturelle. La présence du terme unité dans le second membre est nécessaire, car si $\Omega[z_0] = 0$, $\varphi^2(z_0)$ n'est pas nulle en général.

3. Soient données, dans un problème de planification optimale, au lieu des données unitiales exactes $\{A, \bar{u}, \bar{c}\}$, leurs δ-approximations $\{A, \tilde{u}, \tilde{c}\}$, telles que

$$\|\tilde{u} - \bar{u}\| \leqslant \delta \quad \text{et} \quad |\varphi^2(z) - \tilde{\varphi}^2(z)| \leqslant \delta(1 + \Omega[z]),$$

où $\varphi(z) = (c, z)$, $\tilde{\varphi}(z) = (\tilde{c}, z)$ et $\Omega[z]$ est une fonctionnelle stabilisante sur R^n (une forme quadratique définie positive).

Introduisons une fonction objectif auxiliaire

$$\Phi^2(z) = \tilde{\varphi}(z) + \lambda(1 + \Omega[z]), \quad (\lambda > 0)$$

et cherchons à résoudre approximativement le problème de planification optimale avec $\Phi^2(z)$ comme fonction objectif. Si $\lambda \leqslant \delta$, une telle substitution est loisible au point de vue de la précision de définition de la fonction objectif, car

$$|\Phi^2(z) - \tilde{\varphi}^2(z)| = \lambda(1 + \Omega[z]) \leqslant \delta(1 + \Omega[z]).$$

On demande donc de chercher parmi les vecteurs z appartenant à l'ensemble R_1 et tels que $\| Az - \tilde{u} \| \leqslant \delta$ un vecteur z_δ qui minimise la fonction $\Phi^2(z)$. La fonction objectif auxiliaire $\Phi^2(z)$ (qui est une fonctionnelle quadratique) représente évidemment une fonctionnelle stabilisante quasi monotone sur l'ensemble R_1.

On est alors dans le cadre d'applicabilité du lemme du § 2, ch. II, conformément auquel la borne inférieure exacte de la fonctionnelle (fonction) $\Phi^2(z)$ est atteinte sur le vecteur z_δ de R_1 pour lequel $\| Az_\delta - \tilde{u} \| = \delta$. Ce problème équivaut à chercher le minimum de la forme quadratique

$$M_\lambda^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{c}, A] = \| Az - \tilde{u} \|^2 + \alpha[\tilde{\varphi}^2(z) + \lambda(1 + \Omega[z])],$$

où le paramètre α se définit à partir de la condition $\| Az_\alpha - \tilde{u} \| = \delta$ et z_α est le vecteur minimisant $M_\lambda^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{c}, A]$. Puisque $\| Az_\alpha - \tilde{u} \|^2$ est une forme quadratique, le résidu $\varphi(\alpha) = \| Az_\alpha - \tilde{u} \|^2$ est une fonction continue monotonement croissante, ce qui entraîne que le paramètre α se laisse définir par la condition $\varphi(\alpha) = \delta^2$ de façon unique.

4. Généralement, dans la position mathématique de problèmes de planification optimale, on n'arrive pas à tenir compte, lors du choix de la fonction objectif $\varphi(z) = (c, z)$, de tous les facteurs intervenant dans le problème. Parmi ces facteurs, citons à titre d'exemple la condition selon laquelle le plan optimal cherché répondant aux nouvelles données initiales (peu différentes des anciennes) doit être peu différent du plan ancien (c'est l'exigence du minimum de changement de structure). L'introduction dans la nouvelle fonction objectif $\Phi^2(z)$ du terme $\lambda(1 + \Omega[z])$ peut être considérée comme une sorte de correction tenant compte de l'influence des facteurs négligés dans la fonction objectif $\tilde{\varphi}^2(z)$, où λ se présente comme grandeur estimant cette influence.

On justifie d'une façon analogue (en faisant appel au chapitre II, § 2, p. 8, dans lequel est examiné le problème $Az = u$ pour le cas où l'opérateur $\tilde{A}$ et le second membre $\tilde{u}$ sont connus approximativement) la construction de la solution approchée du problème de planification optimale à données initiales approchées $\{\tilde{A}, \tilde{u}, \tilde{c}\}$ comme la recherche

de la solution du problème de minimisation de la fonctionnelle lissante

$$M_\lambda^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{c}, \tilde{A}] = \| \rho_1^2 + \alpha\{\tilde{\varphi}^2(z) + \lambda(1 + \Omega[z])\},$$

où α est déterminé d'après le résidu, à partir de la condition

$$\rho_1^2 \equiv \rho_U^2(\tilde{A}z_\alpha, \tilde{u}) - h^2\Phi^2(z) = \delta^2.$$

Ici h caractérise l'imprécision avec laquelle est donné l'opérateur $\tilde{A}$ (voir ch. II, § 2).

5. Revenons encore au problème de programmation linéaire: on demande de chercher l'élément $\bar{z}^0$ minimisant la fonction $\varphi(z) = (c, z)$ sur l'ensemble

$$R_2 \equiv \{z\,;\ Az = \bar{u},\ z \in R_1\},$$

où A est un opérateur linéaire.

Soit z_0 l'élément par rapport auquel on cherche la solution normale. Posons un problème auxiliaire I_λ: chercher l'élément z_λ minimisant la fonctionnelle

$$\Phi^2(z) = \varphi^2(z) + \lambda\Omega[z]$$

sur l'ensemble R_2. Ici $\Omega[z]$ est une forme quadratique définie positive.

L'existence de l'élément z_λ est immédiate si les conditions définissant R_2 sont compatibles. Il est facile de voir que l'élément z_λ est unique. En effet, pour les problèmes de programmation linéaire l'ensemble R_2 est convexe. Supposons qu'il existe deux éléments z_λ^1 et z_λ^2 minimisant la fonctionnelle quadratique $\Phi^2(z)$. Sur le segment de la droite d'équation

$$z = z_\lambda^1 + \beta(z_\lambda^2 - z_\lambda^1), \quad -\infty < \beta < \infty,$$

appartenant à R_2, les valeurs de la fonction $\Phi^2(z)$ représentent une fonction quadratique de β, laquelle ne peut admettre deux minimums.

Dans le problème de planification optimale considéré plus haut, nous avons substitué à la fonctionnelle $\tilde{\varphi}^2(z)$ la fonctionnelle

$$\Phi^2(z) = \tilde{\varphi}^2(z) + \lambda(1 + \Omega[z]).$$

Montrons que la solution z_λ du problème faisant intervenir la fonctionnelle $\Phi^2(z)$ tend pour $\lambda \to 0$ vers la solution normale du problème initial.

Soit $\bar{z}^{(0)}$ la solution normale du problème (8; 2,1) à (8; 2,3). On a alors le

Théorème 1. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un* $\lambda_0(\varepsilon)$ *tel que pour* $\lambda \leqslant \lambda_0(\varepsilon)$ *on a*

$$\| z_\lambda - \bar{z}^{(0)} \| \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire que pour $\lambda \to 0$ *la solution* z_λ *tend vers la solution normale du problème* (8; 2,1) à (8; 2,3).

D é m o n s t r a t i o n. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. On a alors un $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $\{\lambda_k\}$ convergeant vers zéro tels que pour tout k on a $\| z_{\lambda_k} - \bar{z}^{(0)} \| \geqslant \varepsilon_0$. Du moment que z_{λ_k} minimise la fonctionnelle $\varphi^2(z) + \lambda_k \Omega[z]$, on a

$$\varphi^2(z_{\lambda_k}) + \lambda_k \Omega[z_{\lambda_k}] \leqslant \varphi^2(\bar{z}^{(0)}) + \lambda_k \Omega[\bar{z}^{(0)}].$$

D'où

$$\Omega[z_{\lambda_k}] \leqslant \Omega[\bar{z}^{(0)}] + \frac{\varphi^2(\bar{z}^{(0)}) - \varphi^2(z_{\lambda_k})}{\lambda_k}.$$

Comme $\varphi(\bar{z}^{(0)}) \leqslant \varphi(z)$ pour tous les z de l'ensemble $R_2 \equiv \equiv \{z;\ Az = \bar{u},\ z \in R_1\}$, on a $\varphi(\bar{z}^{(0)}) \leqslant \varphi(z_{\lambda_k})$. Donc,

$$\Omega[z_{\lambda_k}] \leqslant \Omega[\bar{z}^{(0)}].$$

D'où l'on voit que la suite $\{z_{\lambda_k}\}$ appartient à un ensemble compact d'éléments z pour lesquels

$$\Omega[z] \leqslant \Omega[\bar{z}^{(0)}].$$

On peut en extraire donc une sous-suite convergente $\{z'_{\lambda_k}\}$. Soit $\bar{z} = \lim\limits_{k \to \infty} z'_{\lambda_k}$. Il est évident que $\| \bar{z} - \bar{z}^{(0)} \| \geqslant \varepsilon_0$. Puisque $z'_{\lambda_k} \in R_2$, on a

$$A\bar{z} = \bar{u} \quad \text{et} \quad \bar{z} \in R_1.$$

Il est tout aussi évident que

$$\varphi(\bar{z}) = \varphi(\bar{z}^{(0)})$$

et que

$$\| \bar{z} - z^0 \|^2 = \Omega[\bar{z}] \leqslant \Omega[\bar{z}^{(0)}] = \| \bar{z}^{(0)} - z^0 \|^2.$$

Ces conditions définissent l'unique solution normale du problème (8; 2,1) à (8; 2,3). Par conséquent, $\bar{z} = \bar{z}^{(0)}$; or, cela contredit l'inégalité $\| \bar{z} - \bar{z}^{(0)} \| \geqslant \varepsilon_0$, d'où le théorème.

R e m a r q u e. Si les conditions (8; 2,1) et (8; 2,2) ne sont pas vérifiées (ou s'il est difficile de dire si elles sont vérifiées ou non), on peut chercher la quasi-solution du problème de programmation linéaire. A la recherche de la quasi-solution est applicable la méthode de régularisation que l'on vient de décrire.

6. Supposons que les données initiales A, $\bar{u}$, $\bar{c}$ du problème (8 ; 2,4) nous soient connues approximativement. Au lieu de A, $\bar{u}$, $\bar{c}$ nous avons $\tilde{A}$, $\tilde{u}$, $\tilde{c}$ tels que

$$\|\tilde{A}-A\|\leqslant\delta,\quad \|\tilde{u}-\bar{u}\|\leqslant\delta,\quad \|\tilde{c}-\bar{c}\|\leqslant\delta.$$

On ne peut chercher alors qu'une solution approchant la solution normale du problème (8 ; 2,4). On montrera dans ce paragraphe que pour un choix convenable des paramètres α et λ adapté à l'erreur δ sur les données initiales $\tilde{A}$, $\tilde{u}$, $\tilde{c}$ la solution régularisée $z_{\alpha,\lambda}$, minimisant la fonctionnelle

$$M_\lambda^\alpha[z;\ \tilde{A},\ \tilde{u},\ \tilde{c}],$$

approche avec une précision donnée *a priori* la solution normale cherchée $\bar{z}^{(0)}$ du problème (8 ; 2,4) à données initiales exactes A, $\bar{u}$, $\bar{c}$, et qu'elle est stable aux faibles variations de A, $\bar{u}$, $\bar{c}$.

Notons tout d'abord que le système d'équations

$$\tilde{A}z=\tilde{u}$$

n'est compatible que si

$$\tilde{u}\in U_{\tilde{A}}\equiv\{u;\ u=\tilde{A}z,\quad z\in R^n\}.$$

Si $\tilde{u}\notin U_{\tilde{A}}$, alors, en désignant par $\tilde{v}$ la projection orthogonale de l'élément $\tilde{u}$ sur $U_{\tilde{A}}$, nous avons

$$\|\tilde{A}z-\tilde{u}\|^2=\|\tilde{A}z-\tilde{v}\|^2+\|\tilde{v}-\tilde{u}\|^2.$$

Il en découle que

$$M_\lambda^\alpha[z;\ \tilde{A},\ \tilde{u},\ \tilde{c}]=M_\lambda^\alpha[z;\ \tilde{A},\ \tilde{v},\ \tilde{c}]+\|\tilde{v}-\tilde{u}\|^2. \qquad (8;\ 3,2)$$

Le deuxième terme du second membre de (8 ; 3,2) ne dépend pas de α ni de λ. Donc, l'élément $z_{\alpha,\lambda}$ minimisant la fonctionnelle $M_\lambda^\alpha[z;\ \tilde{A},\ \tilde{u},\ \tilde{c}]$ minimise aussi la fonctionnelle $M_\lambda^\alpha[z;\ \tilde{A},\ \tilde{v},\ \tilde{c}]$, et réciproquement. Etant donné que ces deux fonctionnelles sont des formes quadratiques positives par rapport à z_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, l'existence d'un élément $z_{\alpha,\lambda}$ qui les minimise sur R_1 est évidente.

7. Proposons-nous d'estimer l'écart de la solution régularisée par rapport à la solution normale exacte.

Théorème 2. *Soient connues au lieu des données initiales exactes* A, $\bar{u}$, $\bar{c}$ *du problème* (8 ; 2,1) à (8 ; 2,3) *les données approchées* $\tilde{A}$, $\tilde{u}$, $\tilde{c}$, *telles que*

$$\|\tilde{A}-A\|\leqslant\delta,\quad \|\bar{u}-\tilde{u}\|\leqslant\delta,\quad \|\tilde{c}-\bar{c}\|\leqslant\delta.$$

Soient ensuite $z_{\alpha,\lambda}$ *l'élément minimisant la fonctionnelle*

$$M_\lambda^\alpha [z; \tilde{A}, \tilde{u}, \tilde{c}]$$

sur l'ensemble R_1, *et* $\bar{z}^{(0)}$ *la solution normale du problème* (8; 2,1) *à* (8; 2,3) *à données initiales exactes. Soient enfin* $\alpha_0(\delta)$ *et* $\beta_0(\delta)$ *deux fonctions données continues croissantes non négatives, s'annulant pour* $\delta = 0$ *et vérifiant la condition*

$$\delta^2 \leqslant \alpha_0(\delta)\, \beta_0(\delta).$$

Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, *il existe des* $\lambda_0(\varepsilon)$ *et* $\delta_0(\varepsilon, \lambda_0)$ (*dépendant aussi de* A, $\bar{u}$, $\bar{c}$, $\alpha_0(\delta)$, $\beta_0(\delta)$) *tels que pour tout* $\lambda \leqslant \lambda_0(\varepsilon)$, $\delta \leqslant$ $\leqslant \delta_0(\varepsilon, \lambda_0)$ *et* α *vérifiant les conditions*

$$\frac{\delta^2}{\beta_0(\delta)} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0(\delta)$$

a lieu l'inégalité $\| z_{\alpha,\lambda} - \bar{z}^{(0)} \| \leqslant \varepsilon$.

D é m o n s t r a t i o n. En vertu du théorème 1 du § 3, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\lambda_0(\varepsilon/2)$ tel que, quel que soit $\lambda \leqslant \lambda_0(\varepsilon/2)$, l'élément z_λ minimisant la fonctionnelle

$$\tilde{\varphi}^2(z) + \lambda\Omega[z]$$

sur l'ensemble R_2, vérifie l'inégalité

$$\| z_\lambda - \bar{z}^{(0)} \| \leqslant \varepsilon/2.$$

Il suffit donc de montrer que dans les conditions du théorème 2 de ce paragraphe, pour tout nombre fixé $\lambda > 0$ on trouve un $\delta_0(\varepsilon, \lambda)$ tel que pour $\delta \leqslant \delta_0(\varepsilon, \lambda)$ et α vérifiant les conditions

$$\frac{\delta^2}{\beta_0(\delta)} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0(\delta) \qquad (8;\ 3,3)$$

on a l'inégalité

$$\| z_{\alpha,\lambda} - z_\lambda \| \leqslant \varepsilon/2. \qquad (8;\ 3,4)$$

Pour montrer la validité de l'estimation (8; 3,4) estimons tout d'abord $\Omega[\tilde{z}_{\alpha,\lambda}]$ et $\| A\tilde{z}_{\alpha,\lambda} - A\bar{z}^{(0)} \|$. Il est évident que

$$\alpha\lambda\Omega[\tilde{z}_{\alpha,\lambda}] \leqslant M_\lambda^\alpha[\tilde{z}_{\alpha,\lambda}; \tilde{A}, \tilde{v}, \tilde{c}] \leqslant M_\lambda^\alpha[\bar{z}^{(0)}; \tilde{A}, \tilde{v}, \tilde{c}] =$$
$$= \| \tilde{A}\bar{z}^{(0)} - \tilde{v} \|^2 + \alpha\{\tilde{\varphi}^2(\bar{z}^{(0)}) + \lambda\Omega[\bar{z}^{(0)}]\}. \qquad (8;\ 3,5)$$

Ici $\tilde{\varphi}(z) = (\tilde{c}, z)$. Puis,

$$\| \tilde{A}\bar{z}^{(0)} - \tilde{v} \| \leqslant \| \tilde{A}\bar{z}^{(0)} - A\bar{z}^{(0)} \| + \| A\bar{z}^{(0)} - \tilde{u} \| + \| \tilde{u} - \tilde{v} \| =$$
$$= \| \tilde{A}\bar{z}^{(0)} - A\bar{z}^{(0)} \| + \| \bar{u} - \tilde{u} \| + \| \tilde{u} - \tilde{v} \|).$$

Utilisant les estimations $\|\tilde{A} - A\| \leqslant \delta$ et $\|\tilde{u} - \bar{u}\| \leqslant \delta$, nous obtenons

$$\|\tilde{A}\bar{z}^{(0)} - \tilde{v}\| \leqslant \delta \|\bar{z}^{(0)}\| + \delta + \|\tilde{u} - \tilde{v}\|. \qquad (8;\ 3{,}6)$$

Puisque $\|\tilde{u} - \tilde{v}\| \leqslant \|\tilde{u} - \tilde{A}z\|$ pour tout élément z, on tire de (8; 3,6) que

$$\|\tilde{A}\bar{z}^{(0)} - \tilde{v}\| \leqslant \delta(1 + \|\bar{z}^{(0)}\|) + \|\tilde{u} - \tilde{A}\bar{z}^{(0)}\| \leqslant$$
$$\leqslant \delta(1 + \|\bar{z}^{(0)}\|) + \|\tilde{u} - \bar{u}\| + \|\bar{u} - \tilde{A}\bar{z}^{(0)}\| =$$
$$= \delta(1 + \|\bar{z}^{(0)}\|) + \|\tilde{u} - \bar{u}\| + \|A\bar{z}^{(0)} - \tilde{A}\bar{z}^{(0)}\| \leqslant$$
$$\leqslant \delta(1 + \|\bar{z}^{(0)}\|) + \delta + \|\tilde{A} - A\| \|\bar{z}^{(0)}\| \leqslant 2\delta(1 + \|\bar{z}^{(0)}\|).$$

Ainsi donc,

$$\|\tilde{A}\bar{z}^{(0)} - \tilde{v}\| \leqslant B \cdot \delta, \qquad (8;\ 3{,}7)$$

où $B = 2(1 + \|\bar{z}^{(0)}\|)$. Utilisant cette estimation, on déduit de (8; 3,5) que

$$\alpha\lambda\Omega[\tilde{z}_{\alpha,\lambda}] \leqslant \alpha\lambda \left\{ \frac{B\delta^2}{\alpha\lambda} + \frac{\tilde{\varphi}^2(\bar{z}^{(0)})}{\lambda} + \Omega[\bar{z}^{(0)}] \right\}.$$

Donc,

$$\Omega[\tilde{z}_{\alpha,\lambda}] \leqslant \frac{B\delta^2}{\alpha\lambda} + \frac{\tilde{\varphi}^2(\bar{z}^{(0)})}{\lambda} + \Omega[\bar{z}^{(0)}].$$

Utilisant (8; 3,3), on obtient

$$\Omega[\tilde{z}_{\alpha,\lambda}] \leqslant \frac{B \cdot \beta_L(\delta)}{\lambda} + \frac{\tilde{\varphi}^2(\bar{z}^{(0)})}{\lambda} + \Omega[\bar{z}^{(0)}] = N(\delta, \lambda).$$

Comme $N(\delta, \lambda)$ est une fonction monotonement croissante de la variable δ, on a $\Omega[\tilde{z}_{\alpha,\lambda}] \leqslant N(\delta_0, \lambda)$, où δ_0 est une quantité fixée.

Faisons l'estimation de $\|A\tilde{z}_{\alpha,\lambda} - A\bar{z}^{(0)}\|$. Il est évident que

$$\|A\tilde{z}_{\alpha,\lambda} - A\bar{z}^{(0)}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A\tilde{z}_{\alpha,\lambda} - \tilde{A}\tilde{z}_{\alpha,\lambda}\| + \|\tilde{A}\tilde{z}_{\alpha,\lambda} - \tilde{v}\| + \|\tilde{v} - A\bar{z}^{(0)}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A\tilde{z}_{\alpha,\lambda} - \tilde{A}\tilde{z}_{\alpha,\lambda}\| + \{M_\lambda^\alpha[\tilde{z}_{\alpha,\lambda};\ \tilde{A}, \tilde{v}, \tilde{c}]\}^{1/2} + \|\tilde{v} - A\bar{z}^{(0)}\|.$$

Utilisant les estimations (8; 3,5), (8; 3,7) et (8; 3,3), on obtient

$$\|A\tilde{z}_{\alpha,\lambda} - A\bar{z}^{(0)}\| \leqslant \delta \|\tilde{z}_{\alpha,\lambda}\| +$$
$$+ \sqrt{B\delta^2 + \alpha_0(\delta)\{\tilde{\varphi}^2(\bar{z}^{(0)}) + \lambda\Omega[\bar{z}^{(0)}]\}} + \|\tilde{v} - A\bar{z}^{(0)}\|.$$

Puisque $A\bar{z}^{(0)} = \bar{u}$ et $\|\tilde{u} - \tilde{v}\| \leqslant \|\tilde{u} - \tilde{A}z\|$ pour tout z, il vient

$$\|\tilde{v} - A\bar{z}^{(0)}\| \leqslant \|\tilde{u} - \tilde{v}\| + \|\tilde{u} - \bar{u}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\tilde{u} - \tilde{A}\bar{z}^{(0)}\| + \delta \leqslant \|\tilde{u} - \bar{u}\| + \|A\bar{z}^{(0)} - \tilde{A}\bar{z}^{(0)}\| + \delta \leqslant$$
$$\leqslant 2\delta + \|\tilde{A} - A\| \, \|\bar{z}^{(0)}\| \leqslant \delta(2 + \|\bar{z}^{(0)}\|).$$

A l'aide de cette estimation, on obtient

$$\|A\tilde{z}_{\alpha,\lambda} - A\bar{z}^{(0)}\| \leqslant \delta(2 + \|\bar{z}^{(0)}\| + \|\tilde{z}_{\alpha,\lambda}\|) +$$
$$+ \sqrt{B\delta^2 + \alpha_0(\delta)\{\tilde{\varphi}^2(\bar{z}^{(0)}) + \lambda\Omega[\bar{z}^{(0)}]\}} = \eta(\delta).$$

Il est évident que $\eta(\delta) \to \infty$ pour $\delta \to 0$.

Montrons maintenant que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, \lambda)$ tel que pour $\delta \leqslant \delta_0(\varepsilon, \lambda)$ et pour tous les α vérifiant (8; 3,3) est vraie l'inégalité

$$\|\tilde{z}_{\alpha,\lambda} - z_\lambda\| \leqslant \varepsilon/2.$$

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'un tel $\delta_0(\varepsilon, \lambda)$ n'existe pas. Cela signifie qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ et des suites $\{\tilde{A}_k\}$, $\{\tilde{u}_k\}$, $\{\tilde{c}_k\}$ et $\{\delta_k\}$ convergeant (en normes correspondantes) respectivement vers A, $\bar{u}$, $\bar{c}$ et zéro, tels que pour tous α_k vérifiant les conditions

$$\frac{\delta_k^2}{\beta_0(\delta_k)} \leqslant \alpha_k \leqslant \alpha_0(\delta_k),$$

on a

$$\|\tilde{z}_{\alpha_k,\lambda} - z_\lambda\| \geqslant \varepsilon_0/2.$$

Or,

$$\Omega[\tilde{z}_{\alpha_k,\lambda}] \leqslant N(\bar{\delta}_0, \lambda).$$

La suite $\{\tilde{z}_{\alpha_k,\lambda}\}$ appartient donc à un ensemble compact. On peut en extraire une sous-suite convergente $\{\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\}$. Soit

$$\tilde{z}'_\lambda = \lim_{k\to\infty} \tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}.$$

Il est évident que $\tilde{z}'_\lambda \in R_1$. Puisque

$$\|A\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda} - A\bar{z}^{(0)}\| \leqslant \eta(\delta_k)$$

et que $\eta(\delta_k) \to 0$ pour $k \to \infty$, on a en passant à la limite

$$\|A\tilde{z}'_\lambda - A\bar{z}^{(0)}\| = 0,$$

d'où $A\tilde{z}'_\lambda = A\bar{z}^{(0)} = \bar{u}$. Donc, $\tilde{z}'_\lambda \in R_2$.

Faisons l'estimation de $\varphi^2(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda) + \lambda\Omega[\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda]$. Soit $\tilde{\varphi}_k(z) = (\tilde{c}_k, z)$. On a

$$\alpha_k\{\varphi^2(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda) + \lambda\Omega[\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda]\} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_k\{\varphi^2(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda) - \tilde{\varphi}_k^2(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda) + \tilde{\varphi}_k^2(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda) + \lambda\Omega[\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda]\} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_k\{\tilde{\varphi}_k^2(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda) + \lambda\Omega[\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda]\} + \alpha_k\|\varphi^2(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda) - \tilde{\varphi}_k^2(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda)\| =$$
$$= \alpha_k\{\tilde{\varphi}_k^2(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda) + \lambda\Omega[\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda]\} +$$
$$+ \alpha_k\|\varphi(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda) - \tilde{\varphi}_k(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda)\|\cdot\|\varphi(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda) + \tilde{\varphi}_k(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda)\| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_k\{\tilde{\varphi}_k^2(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda) + \lambda\Omega[\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda]\} +$$
$$+ \alpha_k\|(\tilde{c}_k, \tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda) - (\bar{c}, \tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda)\|(\|(\bar{c}, \tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda)\| + \|(\tilde{c}_k, \tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda)\|) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_k\{\tilde{\varphi}_k^2(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda) + \lambda\Omega[\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda]\} +$$
$$+ \alpha_k\|\tilde{c}_k - \bar{c}\|\|\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda\|(\|\bar{c}\| + \|\tilde{c}_k\|)\|\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda\| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_k\{\tilde{\varphi}_k^2(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda) + \lambda\Omega[\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda]\} + \alpha_k\delta_k\|\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda\|^2(\|\bar{c}\| + \|\tilde{c}_k\|) \leqslant$$
$$\leqslant M_\lambda^{\alpha_k}[z_\lambda, \tilde{A}_k, \tilde{u}_k, \tilde{c}_k] + O(\alpha_k\cdot\delta_k).$$

Ainsi donc,

$$\alpha_k\{\varphi^2(\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda) + \lambda\Omega[\tilde{z}'_{\alpha_k},\lambda]\} \leqslant$$
$$\leqslant M_k^{\alpha_\lambda}[z_\lambda, \tilde{A}_\lambda, \tilde{u}_k, \tilde{c}_k] + O(\alpha_k\cdot\delta_k). \qquad (8;\ 3,8)$$

Ici z_λ est l'élément minimisant la fonctionnelle $\varphi^2(z) + \lambda\Omega[z]$ sur l'ensemble R_2.

D'une façon parfaitement analogue on déduit

$$\alpha_k\{\tilde{\varphi}_k^2(z_\lambda) + \lambda\Omega[z_\lambda]\} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_k\{\varphi^2(z_\lambda) + \lambda\Omega[z_\lambda]\} + \alpha_k\delta_k\|z_\lambda\|^2(\|\bar{c}\| + \|\tilde{c}_k\|). \qquad (8;\ 3,9)$$

Faisons l'estimation de

$$M_\lambda^{\alpha_k}[z_\lambda;\ \tilde{A}_k, \tilde{u}_k, \tilde{c}_k] = \|\tilde{A}_k z_\lambda - \tilde{u}_k\|^2 + \alpha_k\{\tilde{\varphi}_k^2(z_\lambda) + \lambda\Omega[z_\lambda]\}.$$

Puisque $Az_\lambda = \bar{u}$, on a

$$\|\tilde{A}_k z_\lambda - \tilde{u}_k\| \leqslant \|\tilde{A}_k z_\lambda - Az_\lambda\| + \|\tilde{u}_k - \bar{u}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\tilde{A}_k - A\|\,\|z_\lambda\| + \delta_k \leqslant \delta_k(1 + \|z_\lambda\|) \leqslant \delta_k(1 + \|\bar{z}^{(0)}\|),$$

car $\|z_\lambda\| \leqslant \|\bar{z}^{(0)}\|$.

En utilisant (8; 3,9), il vient

$$M_{\lambda}^{\alpha_k}[z_\lambda, \tilde{A}_k, \tilde{u}_k, \tilde{c}_k] \leqslant \delta_k^2 (1 + \| \bar{z}^{(0)} \|)^2 + \\ + \alpha_k \{\varphi^2 (z_\lambda) + \lambda\Omega [z_\lambda]\} + \alpha_k \cdot \delta_k (\| \bar{c} \| + \| \tilde{c}_k \|) \| z_\lambda \|^2.$$

De cette estimation et de (8; 3,8) il découle que

$$\varphi^2 (\tilde{z}'_{\alpha_k}, \lambda) + \lambda\Omega [\tilde{z}'_{\alpha_k}, \lambda] \leqslant \varphi^2 (z_\lambda) + \lambda\Omega [z_\lambda] + O (\delta_k) + O (\delta_k^2 / \alpha_k).$$

Passant dans cette inégalité à la limite pour $k \to \infty$, on obtient

$$\varphi^2 (\tilde{z}_\lambda) + \lambda\Omega [\tilde{z}_\lambda] \leqslant \varphi^2 (z_\lambda) + \lambda\Omega [z_\lambda].$$

Comme l'élément z_λ minimise la fonctionnelle $\varphi^2 (z) + \lambda\Omega [z]$, on a $\tilde{z}_\lambda = z_\lambda$. Donc, pour des k suffisamment élevés, $k \geqslant k_0 (\varepsilon_0)$, on a $\| \tilde{z}'_{\alpha_k}, \lambda_1 - z_\lambda \| < \varepsilon_0/2$, ce qui contredit l'hypothèse. Le théorème est démontré.

Remarque. Nous avons posé $\Omega [z] = \| z - z^0 \|^2$ et nous n'avons utilisé, au fait, que la propriété de l'ensemble des éléments z pour lesquels $\Omega [z] \leqslant d$ d'être compact pour tout $d > 0$. On aboutit aux mêmes résultats si l'on prend en qualité de $\Omega [z]$ n'importe quelle forme quadratique définie positive

$$\Omega [z] = \sum_{i, j} p_{ij} (z_i - z_i^0) (z_j - z_j^0),$$

ayant convenablement modifié la définition de la solution normale.

BIBLIOGRAPHIE

1. ALEXANDROV L. — Processus de calcul par la méthode de régularisation pour l'analyse de la dépendance exponentielle (en russe) *). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 10, 5 (1970).
2. ALIEV B. — Sur deux applications de la méthode de résolution par différences du problème de Neumann dans un rectangle (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 12, 1 (1972).
3. ALIEV B. — Algorithmes de régularisation pour la solution normale stable de l'équation de 2e espèce sur le spectre (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 10, 3 (1970).
4. ANIKONOV Yu. B. — Sur les équations opératorielles de 1re espèce (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 207, 2 (1972).
5. ANTOKHINE Yu. T. — Méthode analytique appliquée au problème des équations de 1re espèce (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 167, 4 (1966).
6. ANTOKHINE Yu. T. — Problèmes mal posés dans l'espace hilbertien et méthodes stables de leur résolution (en russe). Equations différentielles, 3, 7 (1967).
7. ANTOKHINE Yu. T. — Problèmes mal posés pour les équations du type de convolution (en russe). Equations différentielles, 4, 9 (1968).
8. ARSÉNINE V. Ia. — Sur les solutions discontinues des équations de première espèce (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 5, 5 (1965).
9. ARSÉNINE V. Ia., IVANOV V. V. — Sur la résolution de certaines équations intégrales de première espèce du type de convolution par la méthode de régularisation (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 8, 2 (1968).
10. ARSÉNINE V. Ia., IVANOV V. V. — Sur l'influence de la régularisation de p-ième ordre (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 8, 3 (1968).
11. ARSÉNINE V. Ia., IVANOV V. V. — Sur la régularisation optimale (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 182, 1 (1968).
12. ARSÉNINE V. Ia. — Sur la sommation optimale des séries de Fourier à coefficients approchés (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 183, 2 (1968).
13. ARSÉNINE V. Ia., SAVELOVA T. I. — Sur l'application de la méthode de régularisation aux équations intégrales de première espèce du type de convolution (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 9, 6 (1969).

*) Le lecteur intéressé trouvera à la fin de cette rubrique la bibliographie complète en langue russe.

14. ARSÉNINE V. Ia. — Sur une méthode de résolution approchée des équations intégrales de première espèce du type de convolution (en russe). Travaux de l'Institut mathématique de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 133 (1973).
15. ARSÉNINE V. Ia. — Sur les méthodes de résolution de problèmes mal posés (en russe). Cours polycopiés professés à l'Institut des ingénieurs physiciens de Moscou, 1973.
16. BAKOUCHINSKI A. B. — Un procédé général de construction d'algorithmes régularisants pour l'équation linéaire mal posée dans l'espace hilbertien (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 7, 3 (1968).
17. BAKOUCHINSKI A. B., STRAKHOV V. N. — Sur la résolution de certaines équations intégrales de 1[re] espèce par la méthode d'approximations successives (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 8, 1 (1968).
18. BAKOUCHINSKI A. B. — Algorithmes de régularisation pour les équations linéaires à opérateurs non bornés (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 183, 1 (1968).
19. BAKOUCHINSKI A. B. — Sur le problème de construction des algorithmes régularisants linéaires dans les espaces de Banach (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 13, 1 (1973).
20. BOUDAK B. M., VASSILIÉVA V. N. — Sur la résolution du problème inverse de Stéfan (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 13, 1, 4 (1973).
21. VASSINE V. V. — Régularisation des équations différentielles non linéaires aux dérivées partielles (en russe). Equations différentielles, 4, 12, (1968).
22. VASSINE V. V., TANANA V. P. — Résolution approchée des équations opératorielles de première espèce (en russe). Annales mathématiques de l'Université d'Oural, 4, 6 (1968).
23. VASSINE V. V. — Sur les relations entre certaines méthodes variationnelles de résolution approchée de problèmes mal posés (en russe). Notes mathématiques, 7, 3 (1970).
24. VASSINE V. V. — Sur le calcul stable de la dérivée (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 13, 6 (1973).
25. VINOKOUROV V. A. — Sur la notion de régularisabilité d'applications discontinues (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 11, 5 (1971).
26. VINOKOUROV V. A. — Sur l'erreur de la solution approchée des problèmes linéaires (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 12, 3 (1972).
27. VINOKOUROV V. A. — Propriétés générales de l'erreur de la solution approchée des équations fonctionnelles linéaires (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 11, 1 (1971).
28. VINOKOUROV V. A. — Deux remarques à propos du choix du paramètre de régularisation (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 12, 2 (1972).
29. VOÏÉVODINE V. V. — Sur la méthode de régularisation (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 9, 3 (1969).
30. GAVOURINE M. K., RIABOV V. M. — Emploi des polynômes de Tchébychev pour la régularisation d'équations mal posées et mal conditionnées dans l'espace hilbertien (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 13, 6 (1973).
31. GALKINE V. Ia. — Sur le calcul de la fonction de commande dans l'ascension d'une fusée-sonde à l'altitude maximale (en russe). Recueil « Analyse numérique et programmation », XII, Editions de l'Université de Moscou, 1969.

32. GALKINE V. Ia. — Problème de commande par relais de l'ascension verticale d'une fusée (en russe). Recueil « Analyse numérique et programmation », XII, Editions de l'Université de Moscou, 1969.
33. GALKINE V. Ia. — Problèmes du traitement et de l'interprétation des résultats de quelques expériences de physique nucléaire (en russe). Thèse de candidat, Université de Moscou, 1972.
34. GHEIMAN T. M., ZAÏKINE P. N., MASLENNIKOV V. A., SÉDOV N. N. — Sur quelques problèmes de microscopie électronique quantitative (en russe). Recueil « Analyse numérique et programmation », XIV, Editions de l'Université de Moscou, 1970.
35. GLASKO V. B., TIKHONOV A. N., TIKHONRAVOV A. V. — Sur la synthèse de revêtements multicouches (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 14, 1 (1974).
36. GLASKO V. B., KRAVTSOV V. V., KRAVTSOVA G. N. — Sur le problème inverse de gravimétrie (en russe). Bulletin de l'Université de Moscou, 2 (1970).
37. GLASKO V. B. — Sur l'unicité de solution de quelques problèmes inverses de sismologie (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 10, 6 (1970).
38. GLASKO V. B., OSTROMOGHILSKI A. Kh., FILATOV V. G. — Sur la reconstitution de la profondeur et de la forme de la surface de contact par la méthode de régularisation (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 10, 5 (1970).
39. GLASKO V. B. — Emploi de la méthode de régularisation pour la résolution du problème de sondage thermique de l'atmosphère (en russe). Physique de l'atmosphère et de l'océan, IV, 3 (1968).
40. GLASKO V. B., VOLODINE B. A., MOUDRETSOV E. A., NÉFEDOVA N. Yu. — Sur la résolution du problème inverse de prospection gravimétrique pour la surface de contact sur la base de la méthode de régularisation (en russe). Physique de la Terre, 5 (1972).
41. GLASKO V. B. — A propos de l'unicité de détermination de la structure de l'écorce terrestre d'après les ondes superficielles de Rayleigh (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 11, 6 (1971).
42. GLASKO V. B. — Certains problèmes mathématiques de l'interprétation des observations géophysiques (en russe). Thèse de doctorat, Université de Moscou, 1972.
43. GONTCHARSKI A. B., YAGOLA A. G. — Sur l'approximation uniforme des solutions monotones de problèmes mal posés (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 184, 4 (1969).
44. GONTCHARSKI A. V., LÉONOV A. S., YAGOLA A. G. — Quelques estimations de la vitesse de convergence des approximations régularisées pour les équations du type de convolution (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 12, 3 (1972).
45. GONTCHARSKI A. V., LÉONOV A. S., YAGOLA A. G. — Sur la résolution des équations intégrales bidimensionnelles de 1re espèce à noyau dépendant de la différence des arguments (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 11, 5 (1971).
46. GONTCHARSKI A. V., LÉONOV A. S., YAGOLA A. G. — Sur un algorithme régularisant pour les problèmes mal posés à opérateur défini approximativement (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 12, 6 (1972).
47. GONTCHARSKI A. V., LÉONOV A. S., YAGOLA A. G. — Principe généralisé du résidu (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 13, 2 (1973).
48. GONTCHARSKI A. V., LÉONOV A. S., YAGOLA A. G. — Approximation par différences finies de problèmes linéaires mal posés (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 14, 1 (1974).

49. GONTCHARSKI A. V., LÉONOV A. S., YAGOLA A. G. — Sur le principe du résidu dans la résolution de problèmes non linéaires mal posés (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 214, 3 (1974).
50. GORDONOVA V. I., MOROZOV V. A. — Algorithmes numériques du choix du paramètre dans la méthode de régularisation (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 13, 3 (1973).
51. DÉMIDOVITCH V. B. — Reconstitution d'une fonction et de sa dérivée d'après une information expérimentale (en russe). Recueil « Analyse numérique et programmation », VIII, Editions de l'Université de Moscou, 1967.
52. DÉNISSOV A. M. — Sur l'approximation des quasi-solutions de l'équation de Fredholm de 1re espèce à noyau d'une forme spéciale (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 11, 5 (1971) et 12, 6 (1972).
53. DÉNISSOV A. M. — Sur l'approximation des quasi-solutions de quelques équations intégrales de 1re espèce (en russe), Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 14, 1 (1974).
54. DENTCHEV R. — Sur la méthode de régularisation de Tikhonov pour les solutions faibles des problèmes aux limites (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 9, 2 (1969).
55. DIDENKO V. P., KOZLOV N. N. — Sur la régularisation de quelques problèmes mal posés de la cybernétique technique (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 214, 3 (1974).
56. DOLGOPOLOVA T. F. — Régularisation de dimension finie appliquée à la différentiation numérique des fonctions périodiques (en russe). Annales mathématiques de l'Université d'Oural, 7, 4 (1970).
57. DOLGOPOLOVA T. F., IVANOV V. K. — Sur la différentiation numérique (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 6, 3 (1966).
58. DOMBROVSKAÏA I. N. — Sur les équations opératorielles linéaires de première espèce (en russe). Bulletin des Ecoles supérieures, Mathématiques, 2 (1964).
59. DOMBROVSKAÏA I. N. — Sur la résolution d'équations linéaires mal posées dans l'espace hilbertien (en russe). Annales mathématiques de l'Université d'Oural, 4, 4 (1964).
60. DOMBROVSKAÏA I. N., IVANOV V. K. — Sur la théorie de certaines équations linéaires dans les espaces abstraits (en russe). Journal mathématique sibérien, VI, 3 (1965).
61. DOMBROVSKAÏA I. N. — Sur les équations de 1re espèce à opérateur fermé (en russe). Bulletin des Ecoles supérieures, Mathématiques, 6 (1967).
62. JOUKOVSKI E. L., LIPTSER R. Ch. — Sur une méthode de calcul par récurrence des solutions normales de systèmes d'équations algébriques linéaires (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 12, 4 (1972).
63. JOUKOVSKI E. L., MOROZOV V. A. — Sur la régularisation successive au sens de Bayes de systèmes d'équations algébriques (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 12, 2 (1972).
64. JOUKOVSKI E. L. — Régularisation statistique de systèmes d'équations algébriques (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 12, 1 (1972).
65. ZAÏKINE P. N. — Sur la résolution numérique du problème inverse du calcul symbolique dans le domaine réel (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 8, 2 (1968).
66. ZAÏKINE P. N. — Système de traitement mathématique massif des résultats d'une expérience d'analyse des sections des réactions photonucléaires (en russe). Thèse de candidat, Université de Moscou, 1968.

67. ZAÏKINE P. N., METCHÊNOV A. S. — Quelques questions de résolution numérique des équations intégrales de première espèce par la méthode de régularisation (en russe). Comptes rendus du Centre des calculs de l'Université de Moscou, n° 144-T3, 1971 (polycopie).
68. IVANOV V. K. — Problèmes linéaires instables à opérateurs multivoques (en russe). Journal mathématique sibérien, XI, 5 (1970).
69. IVANOV V. K. — Problème inverse de la théorie du potentiel pour un corps voisin de celui donné (en russe). Bulletin de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., série Mathématiques, 20, 6 (1956).
70. IVANOV V. K. — Sur la stabilité du problème inverse du potentiel logarithmique (en russe). Bulletin des Ecoles supérieures, Mathématiques, 4 (1958).
71. IVANOV V. K. — Sur les problèmes mal posés linéaires (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 145, 2 (1962).
72. IVANOV V. K. — Sur les problèmes mal posés (en russe). Recueil mathématique, 61, 2 (1963).
73. IVANOV V. K. — Problèmes mal posés dans les espaces topologiques (en russe). Journal mathématique sibérien, X, 5 (1969).
74. IVANOV V. K. — Sur un type d'équations linéaires mal posées dans les espaces topologiques vectoriels (en russe). Journal mathématique sibérien, VI, 4 (1965).
75. IVANOV V. K. — Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace dans une bande illimitée (en russe). Equations différentielles, 1, 1 (1965).
76. IVANOV V. K. — Sur la régularisation uniforme des problèmes instables (en russe). Journal mathématique sibérien, VII, 3 (1966).
77. IVANOV V. K. — Sur la résolution approchée des équations opératorielles de première espèce (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 6, 6 (1966).
78. IVANOV V. K., KOROLIOUK T. I. — Sur un problème de prolongement analytique numérique des fonctions harmoniques (en russe). Annales mathématiques de l'Université d'Oural, 5, 4 (1966).
79. IVANOV V. K. — Sur les équations intégrales de Fredholm de première espèce (en russe). Equations différentielles, 3, 3 (1967).
80. IVANOV V. K., KOROLIOUK T. I. — Sur l'estimation de l'erreur dans la résolution de problèmes mal posés linéaires (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 9, 1 (1969).
81. IÉVLEV I. I. — Sur la résolution approchée des équations de 1re espèce (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 13, 4 (1973).
82. KARMANOV V. G. — Estimations de la convergence des méthodes itératives de minimisation (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 14, 1 (1974).
83. KNIAZEV A. V. — Conditions de position correcte des équations intégrales non linéaires à noyau dépendant de la différence des variables (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 10, 4 (1970).
84. KOROLIOUK T. I. — Sur le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace (en russe). Bulletin des Ecoles supérieures, Mathématiques, 3 (1973).
85. KORKINA L. F. — Sur la résolution des équations opératorielles de première espèce dans les espaces hilbertiens (en russe). Bulletin des Ecoles supérieures, Mathématiques, 7 (1967).
86. KORKINA L. F. — Sur la régularisation des équations opératorielles de première espèce (en russe). Bulletin des Ecoles supérieures, Mathématiques, 8 (1969).
87. KOSSAREV E. L. — Sur la résolution numérique de l'équation intégrale d'Abel (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 13, 6 (1973).

88. KREIN S. G., PROZOROVSKAÏA O. I. — Sur les méthodes approchées de résolution des problèmes mal posés (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique 3, 1 (1963).
89. KREIN S. G. — Sur les classes de position correcte de quelques problèmes aux limites (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 114, 6 (1957).
90. KROUKOVSKI N. M. — Sur la sommation stable au sens de Tikhonov des séries de Fourier à coefficients perturbés par quelques méthodes régulières (en russe). Bulletin de l'Université de Moscou, série 1, Mathématiques, mécanique, 3 (1973).
91. KRIANEV A. V. — Résolution de problèmes mal posés par la méthode des approximations successives (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 210, 1 (1973).
92. KRIANEV A. V. — Méthode itérative de résolution de problèmes mal posés (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 14, 1 (1974).
93. COURANT R. — Methoden der mathematischen Physik, 2 Bd., Berlin Springer, 1931.
94. LAVRENTIEV M. M. — Sur le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace (en russe). Bulletin de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S, série Mathématiques, 20 (1956).
95. LAVRENTIEV M. M. — Sur le problème inverse de la théorie du potentiel (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 106, 3 (1956).
96. LAVRENTIEV M. M. — Sur le problème de Cauchy pour les équations elliptiques linéaires (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 112, 2 (1957).
97. LAVRENTIEV M. M. — Sur les équations intégrales de première espèce (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 127, 1 (1959).
98. LAVRENTIEV M. M. — Sur les équations intégrales de première espèce (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 133, 2 (1960).
99. LAVRENTIEV M. M. — Sur quelques problèmes mal posés de physique mathématique (en russe). Editions de la filiale sibérienne de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 1962.
100. LAVRENTIEV M. M., VASSILIEV V. G. — Sur la position de quelques problèmes incorrects de physique mathématique (en russe). Journal mathématique sibérien, VII, 3 (1966).
101. LAVRENTIEV M. M. — Sur le problème inverse pour l'équation d'onde (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 157, 3 (1964).
102. LAVRENTIEV M. M. — Sur une classe de problèmes inverses pour les équations différentielles (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 160, 1 (1965).
103. LAVRENTIEV M. M., ROMANOV V. G., VASSILIEV V. G. — Problèmes inverses multidimensionnels pour les équations différentielles (en russe). Novossibirsk, éd. « Naouka », 1969.
104. LATTÈS R., LIONS J.-L. — Méthode de quasi-réversibilité et applications. Paris, Dunod, 1968.
105. LÉBÉDEV V. I. — Sur la résolution de certains problèmes de reconstitution sur des ensembles compacts (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 6, 6 (1966).
106. LISKOVEZ O. A. — Problèmes mal posés à opérateur irréversible fermé (en russe). Equations différentielles, 3, 4 (1967).
107. LISKOVEZ O. A. — Sur la régularisation des équations linéaires dans les espaces de Banach (en russe). Equations différentielles, 4, 6 (1968).
108. LISKOVEZ O. A. — Méthode de régularisation pour les problèmes non

linéaires à opérateur fermé (en russe). Journal mathématique sibérien, XII, 6 (1971).

109. LISKOVEZ O. A. — Méthode des ε-quasi-solutions pour les équations de 1re espèce (en russe). Equations différentielles, 9, 10 (1973).

110. MARTCHOUK G. I., ATANBAÏEV S. A. — Quelques questions de régularisation globale (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 190, 3 (1970).

111. MARTCHOUK G. I. — Sur la position de quelques problèmes inverses (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 156, 3 (1964).

112. MARTCHOUK G. I., VASSILIEV V. G. — Sur la résolution approchée des équations opératorielles de 1re espèce (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 195, 4 (1970).

113. MASLOV V. P. — Régularisation de problèmes mal posés pour les équations intégrales singulières (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 176, 5 (1967).

114. MELNIKOVA I. V. — Sur la résolution d'équations de 1re espèce à opérateur multivoque fermé (en russe). Bulletin des Ecoles supérieures, Mathématiques, 12 (1971).

115. MOROZOV V. A. — Sur la régularisation de problèmes mal posés et le choix du paramètre de régularisation (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 6, 1 (1966).

116. MOROZOV V. A. — Sur le choix du paramètre pour la résolution d'équations fonctionnelles par la méthode de régularisation (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 175, 6 (1967).

117. MOROZOV V. A. — Sur les familles régularisatrices d'opérateurs (en russe). Recueil « Analyse numérique et programmation », VIII, Editions de l'Université de Moscou, 1967.

118. MOROZOV V. A. — Sur le principe du résidu dans la résolution d'équations incompatibles par la méthode de régularisation de Tikhonov (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 13, 5 (1973).

119. MOROZOV V. A. — Sur le calcul des bornes inférieures des fonctionnelles au départ d'une information approchée (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 13, 4 (1973).

120. MOROZOV V. A. — Sur le principe de l'optimalité du résidu dans la résolution approchée d'équations à opérateurs non linéaires (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 14, 2 (1974).

121. MOROZOV V. A. — Sur les pseudosolutions (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 9, 6 (1969).

122. MOROZOV V. A. — Problèmes mal posés linéaires et non linéaires (en russe). Tour d'horizon de la science et de la technique. Analyse mathématique, 11, Moscou, Editions de l'Institut de l'information scientifique et technique, 1973.

123. MOROZOV V. A. — Sur la résolution de problèmes mal posés à opérateur non borné non linéaire par la méthode de régularisation (en russe). Equations différentielles, 6, 8 (1970).

124. MOURAVIEVA M. V. — Sur l'optimalité et les propriétés limites de la solution au sens de Bayes d'un système d'équations algébriques linéaires (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 13, 4 (1973).

125. NOVIKOV P. S. — Sur l'unicité du problème inverse de la théorie du potentiel (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S, 18, 3 (1938).

126. OSTROMOGHILSKI A. Kh. — Sur l'unicité de la solution de quelques problèmes inverses (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 11, 1 (1971).

127. OKHOTSIMSKI D. E. — Pour la théorie du mouvement des fusées (en russe). Mathématiques et Mécanique appliquées, 10, 2 (1946).
128. PÉTROV A. P., KHOVANSKI A. V. — Estimation de l'erreur dans la résolution de problèmes linéaires en présence d'erreurs entachant les opérateurs des seconds membres des équations (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 14, 2 (1974).
129. PÉTROV V. V., OUSKOV A. S. — Aspects informationnels du problème de régularisation (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 195, 4 (1970).
130. PÉRELMAN A. Ia., POUNINA V. A. — Application de la convolution de Mellin à la résolution des équations intégrales de 1re espèce à noyau dépendant du produit (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 9, 3 (1969).
131. PRILEPKO A. I. — Problème inverse extérieur du potentiel volumique de densité variable pour un corps voisin de celui donné (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 185, 1 (1969).
132. PRILEPKO A. I. — Problèmes inverses intérieurs de la théorie du potentiel (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 182, 3 (1968).
133. PRILEPKO A. I. — Problèmes inverses de contact des potentiels magnétiques généralisés (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 181, 5 (1968).
134. PRILEPKO A. I. — Sur l'unicité de détermination de la forme et de la densité de corps dans les problèmes inverses de la théorie du potentiel (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 193, 2 (1970).
135. PRILEPKO A. I. — Sur l'unicité de détermination de la forme du corps d'après les valeurs du potentiel extérieur (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 160, 1 (1965).
136. PRILEPKO A. I. — Sur l'unicité de la solution d'un problème inverse résumé par une équation intégrale de première espèce (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 167, 4 (1966).
137. PRILEPKO A. I. — Existence des solutions de problèmes inverses de la théorie du potentiel (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 199, 1 (1971).
138. PRILEPKO A. I. — Problèmes inverses intérieurs des potentiels généralisés (en russe). Journal mathématique sibérien, 12, 3 (1971).
139. PRILEPKO A. I. — Sur les problèmes inverses de la théorie du potentiel (en russe). Equations différentielles, 3, 1 (1967).
140. PRILEPKO A. I. — Problème inverse intérieur du potentiel métaharmonique pour un corps voisin de celui donné (en russe). Equations différentielles, 8, 1 (1972).
141. ROMANOV V. G. — Quelques problèmes inverses pour les équations du type hyperbolique (en russe). Novossibirsk, Editions « Naouka », 1972.
142. ROMANOV V. G. — Problèmes inverses pour les équations différentielles (en russe). Editions de l'Université de Novossibirsk, 1973.
143. ROMANOV V. G. — Problème inverse abstrait et conditions de sa position correcte (en russe). Analyse fonctionnelle, 7, 3 (1973).
144. SAVELOVA T. I., TIKHOMIROV V. V. — Sur la résolution d'équations intégrales de 1re espèce du type de convolution dans le cas multidimensionnel (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 13, 3 (1973).
145. SAVELOVA T. I. — Sur la résolution d'équations du type de convolution à noyau défini avec imprécision par la méthode de régularisation (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 12, 1 (1972).
146. SAVELOVA T. I. — Sur l'application d'une classe d'algorithmes régularisants à la résolution d'équations intégrales de 1re espèce du type de

convolution dans les espaces de Banach (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 14, 2 (1974).
147. SAVELOVA T. I. — Méthodes de résolution par projection de problèmes mal posés linéaires (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique 14, 4 (1974).
148. STRAKHOV V. N. — Sur la résolution de problèmes mal posés de magnéto- et gravimétrie résumés par des équations intégrales du type de convolution (en russe). Bulletin de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., série Physique de la Terre, 4, 5 (1967).
149. STRAKHOV V. N. — Sur la résolution numérique de problèmes mal posés résumés par des équations intégrales du type de convolution (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 178, 2 (1968).
150. STRAKHOV V. N. — Sur les problèmes mal posés linéaires dans l'espace hilbertien (en russe). Equations différentielles, 6, 8 (1970).
151. STRAKHOV V. N. — Sur la méthode des approximations successives pour les équations linéaires dans l'espace hilbertien (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 13, 4 (1973).
152. STRAKHOV V. N. — Sur la construction des solutions approchées, optimales selon l'ordre d'écart, de problèmes linéaires conventionnellement bien posés (en russe). Equations différentielles, 11, 10 (1973).
153. STRAKHOV V. N. — A propos de la vitesse de convergence dans la méthode d'itération simple (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 13, 6 (1973).
154. TANANA V. P. — Solution approchée d'équations opératorielles de première espèce dans les espaces localement convexes (en russe). Bulletin des Ecoles supérieures, Mathématiques, 9 (1973).
155. TIKHONOV A. N. — Sur la stabilité de problèmes inverses (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 39, 5 (1943).
156. TIKHONOV A. N. — Sur la résolution de problèmes mal posés (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 151, 3 (1963).
157. TIKHONOV A. N. — Sur la régularisation de problèmes mal posés (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 153, 1 (1963).
158. TIKHONOV A. N. — Sur les méthodes stables de sommation des séries de Fourier (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 156, 1 (1964).
159. TIKHONOV A. N. — Sur la résolution d'équations intégrales non linéaires (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 156, 56 (1964).
160. TIKHONOV A. N., GLASKO V. B. — Sur la résolution approchée d'équations intégrales de Fredholm de première espèce (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 4, 3 (1964).
161. TIKHONOV A. N. — Sur les équations non linéaires de première espèce (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 161, 5 (1965).
162. TIKHONOV A. N., ARSÈNINE V. Ia., VLADIMIROV L. A., DOROCHENKO G. G., DOUMOVA A. A. — A propos du traitement des spectres d'appareils des γ-quanta et des neutrons rapides mesurés à l'aide de spectromètres monocristalliques à scintillation (en russe). Bulletin de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., série Physique, XXIX, 5 (1965).
163. TIKHONOV A. N. — Sur les méthodes de régularisation de problèmes de commande optimale (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 162, 4 (1965).
164. TIKHONOV A. N., ARSÈNINE V. Ia., DOUMOVA A. A., MAÏOROV L. V., MOSTOVOÏ V. I. — Une méthode nouvelle de reconstitution de spectres vrais (en russe). Energie atomique, 18, 6 (1965).
165. TIKHONOV A. N., GLASKO V. B. — Utilisation des méthodes de ré-

gularisation dans les problèmes non linéaires (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 5, 3 (1965).
166. TIKHONOV A. N. — Sur les problèmes mal posés d'algèbre linéaire et sur une méthode stable de leur résolution (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 163, 6 (1965).
167. TIKHONOV A. N. — Sur la stabilité des algorithmes de résolution de systèmes dégénérés d'équations algébriques linéaires (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 5, 4 (1965).
168. TIKHONOV A. N. — Sur les problèmes mal posés de planification optimale et sur les méthodes stables de leur résolution (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 164, 3 (1965).
169. TIKHONOV A. N. — Sur les méthodes de résolution de problèmes mal posés (en russe). Thèses des rapports présentés au Congrès international des mathématiciens de 1966 à Moscou.
170. TIKHONOV A. N. — Sur les problèmes mal posés de planification optimale (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 6, 1 (1966).
171. TIKHONOV A. N. — Sur la stabilité du problème de minimisation des fonctionnelles (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 6, 4 (1966).
172. TIKHONOV A. N., GALKINE V. Ia., ZAÏKINE P. N. — Sur les méthodes directes de résolution de problèmes de commande optimale (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 7, 2 (1967).
173. TIKHONOV A. N., GLASKO V. B. — Sur les méthodes de détermination de la température à la surface des corps (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 7, 4 (1967).
174. TIKHONOV A. N. — Sur les problèmes mal posés (en russe). Recueil « Analyse numérique et programmation », VIII, Editions de l'Université de Moscou, 1967.
175. TIKHONOV A. N., ALIKAÏEV V. V., ARSÈNINE V. Ia., DOUMOVA A. A. — Détermination de la fonction de répartition des électrons du plasma d'après le spectre du rayonnement de freinage (en russe). Journal de physique expérimentale et théorique, 55, 5 (1968).
176. TIKHONOV A. N., CHEVTCHENKO V. G., GALKINE V. Ia., ZAÏKINE P. N., GORIATCHEV B. I., ICHKHANOV B. S., KAPITONOV I. M. — Un système de traitement automatique massif des résultats d'une expérience d'analyse des sections des réactions photonucléaires (en russe). Recueil « Analyse numérique et programmation », XIV, Editions de l'Université de Moscou, 1970.
177. TIKHONOV A. N., DMITRIEV V. I. — Sur les méthodes de résolution du problème inverse de la théorie des antennes (en russe). Recueil « Analyse numérique et programmation, XIII, Editions de l'Université de Moscou, 1969.
178. TIKHONOV A. N., KARMANOV V. G., ROUDNÉVA T. L. — Sur la stabilité de problèmes de programmation linéaire (en russe). Recueil « Analyse numérique et programmation », XII, Editions de l'Université de Moscou, 1969.
179. TOURTCHINE V. F. — Résolution de l'équation de Fredholm de 1re espèce pour l'ensemble statistique de fonctions lisses (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 7, 6 (1967).
180. TOURTCHINE V. F. — Choix de l'ensemble de fonctions lisses dans la résolution du problème inverse (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 8, 1 (1968).
181. TOURTCHINE V. F., KOZLOV V. P., MALKÉVITCH M. S. — Emploi des méthodes de la statistique mathématique par la résolution de problèmes mal posés (en russe). Réalisations des sciences physiques, 102, 3 (1970).

182. FRANK L. S., TCHOUDOV L. A. — Méthodes aux différences de résolution du problème mal posé de Cauchy (en russe). Recueil « Analyse numérique et programmation », IV, Editions de l'Université de Moscou, 1965.
183. FRANK L. S. — Méthodes aux différences de résolution du problème de Cauchy pour des systèmes mal posés du premier ordre (en russe). Bulletin de l'Université de Moscou, Mathématiques, 1 (1966).
184. KHALFINE L. A., SOUDAKOV V. N. — Approche statistique à la position correcte de problèmes de physique mathématique (en russe). Rapports de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 157, 5 (1964).
185. KHOUDAK Yu. I. — Sur la régularisation des solutions d'équations intégrales de première espèce (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 6, 4 (1966).
186. KHOUDAK Yu. I. — Sur la convergence d'une famille d'opérateurs régularisants (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 12, 2 (1972).
187. KHOUDAK Yu. I. — Sur la convergence des algorithmes régularisants (en russe). Journal d'analyse numérique et de physique mathématique, 11, 1 (1971).
188. TCHOUDOV L. A. — Schémas aux différences et problèmes mal posés pour les équations aux dérivées partielles (en russe). Recueil « Analyse numérique et programmation », VIII, Editions de l'Université de Moscou, 1967.
189. ARCANGELI R. — Pseudosolution de l'équation $Ax = y$, Comptes ren. Acad. Sci., 263, 8 (1966).
190. BELLMAN R., KALABA R., LOCHETT J. — Dynamic programming and ill-conditioned linear systems. J. Math. Anal. and Appl., 10 (1965).
191. BENSONSSAN A., KENNETH P. — Sur l'analogie entre les méthodes de régularisation et de pénalisation, Revue franç. Inform. et Rech. opér., 2, 13 (1968).
192. CAVAYAN H. S., BELFORD G. G. — On computing a stable least squares solution to the inverse problem for a planar Newtonian potential, SIAM, J. Appl. Math., 20, 1 (1971).
193. CRUCEANU S. — Régularisation pour les problèmes à opérateurs monotones et la méthode de Galerkine. Comment. Math. Univ. Carol., 12, 1 (1971).
194. DOUGLAS J. — A numerical method for analitic continuation. Boundary Problems, Different. Equat., Univ. Wisconsin Press, Madison, 1960.
195. DOUGLAS J. — Mathematical programming and integral equations, Sympos. Numerical Treatm. Ordinary Different. Equat., Integral and Integro-different. Equat., Birkhauser, 1960.
196. DOUGLAS J. — Approximate continuation of harmonic and parabolic functions. Numer. Sol. of Partial Different. Equat., Acad. Press, N.Y., 1966.
197. DOUGLAS J., CALLIE T. — An approximate solution of an improper boundary value problem, Duke Math. J., 26, 3 (1959).
198. FOX D. W., PUCCI C. — The Dirichlet problem for the waves equation, Annali di Math., 46 (1958).
199. FICHERA G. — Sul concetto di problema « ben posti » per una equazione differentiale. Rend. math. e appl., 19, 1 (1960).
200. FURI M., VIGNOLLI A. — On the regularization on nonlinear ill-posed problem in Banach spaces, J. Optimiz. Theory and Appl., 4, 3 (1969).
201. HADAMARD J. — Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. Bull. Univ. Princeton, 13 (1902).
202. HADAMARD J. — Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Hermann, P., 1932.
203. JOHN F. — Numerical solution on the equation of heat conduction for proceeding times. Ann. Math. Pura ed Appl., 40 (1955).

204. JOHN F. — A note on « improper » problems in partial differential equations. Comm. Pure and Appl. Math., 8 (1955).
205. JOHN F. — Continuous dependence on data for solutions with a prescribed bound. Comm. Pure and Appl. Math., 13, 4 (1960).
206. JOHN F. — Numerical solution of problems which are not well posed in the sense of Hadamard, Sympos. Numeric. Treatm. Partial Different. Equat. with Real Char., Rome, 1959.
207. MARTON K., VARGA L. — Regularization of certain operator equations by filters, Stud. Sci. Math. Hung., 6, 3 (1971); 6, 4 (1971).
208. NEDYALKOV I. P. — An approach in the theory of incorrect problems. Rapports de l'Académie des sciences de la Bulgarie, 23 (1970).
209. NEWMAN D. J. — Numerical method for solution of an elliptic Cauchy problem. J. Math. and Phys., 39, 1 (1960).
210. PANE L. E. — Bounds in the Cauchy problem for the Laplace equation. Arch. Rational. Mech. Anal., 5, 1 (1960).
211. PHILLIPS D. L. — A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, J. Assoc. Comput. Mach., 9, 1 (1962).
212. PUCCI C. — Sui problemi di Cauchy non « ben posti », Atti Acad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fis. mat. e natur., 18, 5 (1955).
213. PUCCI C. — Discussione del problema di Cauchy per le equazioni di tipo ellittico. Ann. Math. pura ed appl., 46 (1958).
214. PUCCI C. — On the improperly posed Cauchy problems for parabolic equations. Sympos. Numeric. Treatm. Partial Different. Equat. with Real Charac., Rome, 1959.
215. REPLOGLE J., HOLCOMB B. D. — The use of mathematical programming for solving singular and poorly conditioned systems of equations, J. Math. Anal., 20, 2 (1967).
216. RIBIÈRE G. — Régularisation des opérateurs. Revue franç. Inform. et Rech. opér., 1, 11 (1967).
217. SHAW C. B. — Improvement of the resolution of an instrument by numerical solution of an integral equation, J. Math. Anal. and Appl., 37, 1 (1972).
218. STRAND O. N., WESTWATER E. R. — Statistical estimation of the numerical solution of a Fredholm integral equation of the first kind, J. Assoc. Comput. Mach., 15, 1 (1968).
219. TWOMEY S. — On the numerical solution of Fredholm integral equation of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadrature. J. Assoc. Comput. Mach., 10, 1 (1963).
220. TWOMEY S. — The application of numerical filtering to the solution of integral equations encountered in indirect sensing measurements. J. Franklin Inst., 1965.
221. WIENER N. — Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications. N.Y., J. Wiley, 1950.

BIBLIOGRAPHIE EN RUSSE

1. АЛЕКСАНДРОВ Л. — Регуляризационный вычислительный процесс для анализа экспоненциальной зависимости, ЖВМ и МФ, 10, 5 (1970).
2. АЛИЕВ Б. — О двух подходах к разностному методу решения задачи Неймана в прямоугольной области, ЖВМ и МФ, 12, 1 (1972).
3. АЛИЕВ Б. — Регуляризирующие алгоритмы для устойчивого нормального решения уравнения II рода на спектре, ЖВМ и МФ, 10, 3 (1970).
4. АНИКОНОВ Ю. Б. — Об операторных уравнениях I рода. ДАН СССР, 207, 2 (1972).
5. АНТОХИН Ю. Т. — Аналитический подход к проблеме уравнений I рода. ДАН СССР, 167, 4 (1966).
6. АНТОХИН Ю. Т. — Некорректные задачи в гильбертовом пространстве и устойчивые методы их решения. Дифф. уравн., 3, 7 (1967).
7. АНТОХИН Ю. Т. — Некорректные задачи для уравнений типа свертки. Дифф. уравн., 4, 9 (1968).
8. АРСЕНИН В. Я. — О разрывных решениях уравнений первого рода, ЖВМ и МФ, 5, 5 (1965).
9. АРСЕНИН В. Я., ИВАНОВ В. В. — О решении некоторых интегральных уравнений первого рода типа свертки методом регуляризации, ЖВМ и МФ, 8, 2 (1968).
10. АРСЕНИН В. Я., ИВАНОВ В. В. — О влиянии регуляризации p-го порядка, ЖВМ и МФ, 8, 3 (1968).
11. АРСЕНИН В. Я., ИВАНОВ В. В. — Об оптимальной регуляризации, ДАН СССР, 182, 1 (1968).
12. АРСЕНИН В. Я. — Об оптимальном суммировании рядов Фурье с приближенными коэффициентами. ДАН СССР, 183, 2 (1968).
13. АРСЕНИН В. Я., САВЕЛОВА Т. И. — О применении метода регуляризации к интегральным уравнениям первого рода типа свертки, ЖВМ и МФ, 9, 6 (1969).
14. АРСЕНИН В. Я. — Об одном способе приближенных решений интегральных уравнений первого рода типа сверток. Тр. МИАН СССР, 133 (1973).
15. АРСЕНИН В. Я. — О методах решения некорректно поставленных задач. Курс лекций, М., 1973, изд. МИФИ, ротапринт.
16. БАКУШИНСКИЙ А. Б. — Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве. ЖВМ и МФ, 7, 3 (1968).
17. БАКУШИНСКИЙ А. Б., СТРАХОВ В. Н. — О решении некоторых интегральных уравнений I рода методом последовательных приближений. ЖВМ и МФ, 8, 1 (1968).
18. БАКУШИНСКИЙ А. Б. — Алгоритмы регуляризации для линейных уравнений с неограниченными операторами. ДАН СССР, 183, 1 (1968).

19. БАКУШИНСКИЙ А. Б. — К проблеме построения линейных регуляризирующих алгоритмов в банаховых пространствах. ЖВМ и МФ, 13, 1 (1973).
20. БУДАК Б. М., ВАСИЛЬЕВА В. Н. — О решении обратной задачи Стефана. ЖВМ и МФ, 13, 1, 4 (1973).
21. ВАСИН В. В. — Регуляризация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Дифф. уравн., 4, 12 (1968).
22. ВАСИН В. В., ТАНАНА В. П. — Приближенное решение операторных уравнений первого рода. Матем. зап. УРГУ, 4, 6 (1968).
23. ВАСИН В. В. — О связи некоторых вариационных методов приближенного решения некорректных задач. Матем. заметки, 7, 3 (1970).
24. ВАСИН В. В. — Об устойчивом вычислении производной, ЖВМ и МФ, 13, 6 (1973).
25. ВИНОКУРОВ В. А. — О понятии регуляризуемости разрывных отображений. ЖВМ и МФ, 11, 5 (1971).
26. ВИНОКУРОВ В. А. — О погрешности приближенного решения линейных задач. ЖВМ и МФ, 12, 3 (1972).
27. ВИНОКУРОВ В. А. — Общие свойства погрешности приближенного решения линейных функциональных уравнений. ЖВМ и МФ, 11, 1 (1971).
28. ВИНОКУРОВ В. А. — Два замечания о выборе параметра регуляризации. ЖВМ и МФ, 12, 2 (1972).
29. ВОЕВОДИН В. В. — О методе регуляризации. ЖВМ и МФ, 9, 3 (1969).
30. ГАВУРИН М. К., РЯБОВ В. М. — Применение полиномов Чебышева при регуляризации некорректных и плохо обусловленных уравнений в гильбертовом пространстве. ЖВМ и МФ, 13, 6 (1973).
31. ГАЛКИН В. Я. — К расчету управляющей функции при подъеме ракеты-зонда на максимальную высоту. Сб. « Вычисл. матем. и программирование », XII, М., изд. МГУ, 1969.
32. ГАЛКИН В. Я. — Задача релейного управления при вертикальном подъеме ракеты. Сб. « Вычисл. матем. и программирование », XII, М., изд. МГУ, 1969.
33. ГАЛКИН В. Я. — Задачи обработки и интерпретации результатов некоторых экспериментов в ядерной физике. Автореферат канд. диссерт., МГУ, 1972.
34. ГЕЙМАН Т. М., ЗАИКИН П. Н., МАСЛЕННИКОВ В. А., СЕДОВ Н. Н. — О некоторых задачах количественной электронной микроскопии. Сб. « Вычисл. матем. и программирование », XIV, М., изд. МГУ, 1970.
35. ГЛАСКО В. Б., ТИХОНОВ А. Н., ТИХОНРАВОВ А. В. — О синтезе многослойных покрытий. ЖВМ и МФ, 14, 1 (1974).
36. ГЛАСКО В. Б., КРАВЦОВ В. В., КРАВЦОВА Г. Н. — Об одной обратной задаче гравиметрии. Вестник МГУ, 2 (1970).
37. ГЛАСКО В. Б. — О единственности решения некоторых обратных задач сейсмологии. ЖВМ и МФ, 10, 6 (1970).
38. ГЛАСКО В. Б., ОСТРОМОГИЛЬСКИЙ А. Х., ФИЛАТОВ В. Г. — О восстановлении глубины и формы контактной поверхности на основе регуляризации. ЖВМ и МФ, 10, 5 (1970).
39. ГЛАСКО В. Б. — Использование метода регуляризации для решения задачи термического зондирования атмосферы. Физика атмосферы и океана, IV, 3 (1968).
40. ГЛАСКО В. Б., ВОЛОДИН Б. А., МУДРЕЦОВ Е. А., НЕФЕДОВА Н. Ю. — О решении обратной задачи гравиразведки для контактной поверхности на основе метода регуляризации. Физика Земли, 5 (1972).
41. ГЛАСКО В. Б. — К вопросу о единственности определения структуры земной коры по поверхностным волнам Рэлея. ЖВМ и МФ, 11, 6 (1971).
42. ГЛАСКО В. Б. — Некоторые математические вопросы интерпретации

геофизических наблюдений. Автореферат докторской диссертации, МГУ, 1972.
43. ГОНЧАРСКИЙ А. В., ЯГОЛА А. Г. — О равномерном приближении монотонных решений некорректных задач. ДАН СССР, 184, 4 (1969).
44. ГОНЧАРСКИЙ А. В., ЛЕОНОВ А. С., ЯГОЛА А. Г. — Некоторые оценки скорости сходимости регуляризованных приближений для уравнений типа свертки. ЖВМ и МФ, 12, 3 (1972).
45. ГОНЧАРСКИЙ А. В., ЛЕОНОВ А. С., ЯГОЛА А. Г. — О решении двумерных интегральных уравнений I рода с ядром, зависящим от разности аргументов. ЖВМ и МФ, 11, 5 (1971).
46. ГОНЧАРСКИЙ А. В., ЛЕОНОВ А. С., ЯГОЛА А. Г. — Об одном регуляризующем алгоритме для некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором. ЖВМ и МФ, 12, 6 (1972).
47. ГОНЧАРСКИЙ А. В., ЛЕОНОВ А. С., ЯГОЛА А. Г. — Обобщенный принцип невязки. ЖВМ и МФ, 13, 2 (1973).
48. ГОНЧАРСКИЙ А. В., ЛЕОНОВ А. С., ЯГОЛА А. Г. — Конечно-разностная аппроксимация линейных некорректных задач. ЖВМ и МФ, 14, 1 (1974).
49. ГОНЧАРСКИЙ А. В., ЛЕОНОВ А. С., ЯГОЛА А. Г. — О принципе невязки при решении нелинейных некорректных задач. ДАН СССР, 214, 3 (1974).
50. ГОРДОНОВА В. И., МОРОЗОВ В. А. — Численные алгоритмы выбора параметра в методе регуляризации. ЖВМ и МФ, 13, 3 (1973).
51. ДЕМИДОВИЧ В. Б. — Восстановление функции и ее производных по экспериментальной информации. Сб. « Вычисл. матем. и программирование », VIII, М., изд. МГУ, 1967.
52. ДЕНИСОВ А. М. — Об аппроксимации квазирешений уравнения Фредгольма I рода с ядром специального вида. ЖВМ и МФ, 11, 5 (1971) и 12, 6 (1972).
53. ДЕНИСОВ А. М. — Об аппроксимации квазирешений некоторых интегральных уравнений I рода. ЖВМ и МФ, 14, 1 (1974).
54. ДЕНЧЕВ Р. — О методе регуляризации А. Н. Тихонова для слабых решений краевых задач. ЖВМ и МФ, 9, 2 (1969).
55. ДИДЕНКО В. П., КОЗЛОВ Н. Н. — О регуляризации некоторых некорректных задач технической кибернетики. ДАН СССР, 214, 3 (1974).
56. ДОЛГОПОЛОВА Т. Ф. — Конечномерная регуляризация при численном дифференцировании периодических функций. Матем. зап. УРГУ, 7, 4 (1970).
57. ДОЛГОПОЛОВА Т. Ф., ИВАНОВ В. К. — О численном дифференцировании. ЖВМ и МФ, 6, 3 (1966).
58. ДОМБРОВСКАЯ И. Н. — О линейных операторных уравнениях первого рода. Изв. вузов, Математика, 2 (1964).
59. ДОМБРОВСКАЯ И. Н. — О решении некорректных линейных уравнений в гильбертовом пространстве. Матем. зап. УРГУ, 4, 4 (1964).
60. ДОМБРОВСКАЯ И. Н., ИВАНОВ В. К. — К теории некоторых линейных уравнений в абстрактных пространствах. Сибирский матем. журн., VI, 3 (1965).
61. ДОМБРОВСКАЯ И. Н. — Об уравнениях I рода с замкнутым оператором. Изв. вузов, Математика, 6 (1967).
62. ЖУКОВСКИЙ Е. Л., ЛИПЦЕР Р. Ш. — О рекуррентном способе вычисления нормальных решений линейных алгебраических систем уравнений. ЖВМ и МФ, 12. 4 (1972).
63. ЖУКОВСКИЙ Е. Л., МОРОЗОВ В. А. — О последовательной байесовской регуляризации алгебраических систем уравнений. ЖВМ и МФ, 12, 2 (1972).

64. ЖУКОВСКИЙ Е. Л. — Статистическая регуляризация алгебраических систем уравнений. ЖВМ и МФ, 12, 1 (1972).
65. ЗАИКИН П. Н. — О численном решении обратной задачи операционного исчисления в действительной области. ЖВМ и МФ, 8, 2 (1968).
66. ЗАИКИН П. Н. — Система сплошной автоматической обработки результатов эксперимента по исследованию сечений фотоядерных реакций. Автореферат канд. диссерт., МГУ, 1968.
67. ЗАИКИН П. Н., МЕЧЕНОВ А. С. — Некоторые вопросы численного решения интегральных уравнений первого рода методом регуляризации, Отчет ВЦ МГУ, № 144-ТЗ, изд. МГУ, 1971, ротапринт.
68. ИВАНОВ В. К. — Линейные неустойчивые задачи с многозначными операторами. Сибирский матем. журн., XI, 5 (1970).
69. ИВАНОВ В. К. — Обратная задачи потенциала для тела, близкого к данному. Изв. АН СССР, Сер. матем., 20, 6 (1956).
70. ИВАНОВ В. К. — Об устойчивости обратной задачи логарифмического потенциала. Изв. вузов, Математика, 4 (1958).
71. ИВАНОВ В. К. — О линейных некорректных задачах. ДАН СССР, 145, 2 (1962).
72. ИВАНОВ В. К. — О некорректно поставленных задачах. Матем. сборник, 61, 2 (1963).
73. ИВАНОВ В. К. — Некорректные задачи в топологических пространствах. Сибирский матем. журнал, X, 5 (1969).
74. ИВАНОВ В. К. — Об одном типе некорректных линейных уравнений в векторных топологических пространствах. Сибирский матем. журн., VI, 4 (1965).
75. ИВАНОВ В. К. — Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе. Дифф. уравн., 1, 1 (1965).
76. ИВАНОВ В. К. — О равномерной регуляризации неустойчивых задач. Сибирский матем. журн., VII, 3 (1966).
77. ИВАНОВ В. К. — О приближенном решении операторных уравнений первого рода. ЖВМ и МФ, 6, 6 (1966).
78. ИВАНОВ В. К., КОРОЛЮК Т. И. — Об одной задаче численного аналитического продолжения гармонических функций. Матем. зап. УРГУ, 5, 4 (1966).
79. ИВАНОВ В. К. — Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода. Дифф. уравн., 3, 3 (1967).
80. ИВАНОВ В. К., КОРОЛЮК Т. И. — Об оценке погрешности при решении линейных некорректно поставленных задач. ЖВМ и МФ, 9, 1 (1969).
81. ИЕВЛЕВ И. И. — О приближенном решении уравнений I рода. ЖВМ и МФ, 13, 4 (1973).
82. КАРМАНОВ В. Г. — Оценки сходимости итерационных методов минимизации. ЖВМ и МФ, 14, 1 (1974).
83. КНЯЗЕВ А. В. — Условия корректности нелинейных интегральных уравнений с ядром, зависящим от разности переменных. ЖВМ и МФ, 10, 4 (1970).
84. КОРОЛЮК Т. И. — О задаче Коши для уравнения Лапласа. Изв. вузов, Математика, 3 (1973).
85. КОРКИНА Л. Ф. — О решении операторных уравнений первого рода в гильбертовых пространствах. Изв. вузов, Математика, 7 (1967).
86. КОРКИНА Л. Ф. — О регуляризации операторных уравнений первого рода. Изв. вузов, Математика, 8 (1969).
87. КОСАРЕВ Е. Л. — О численном решении интегрального уравнения Абеля. ЖВМ и МФ, 13, 6 (1973).
88. КРЕЙН С. Г., ПРОЗОРОВСКАЯ О. И. — О приближенных методах решения некорректных задач. ЖВМ и МФ, 3, 1 (1963).

89. КРЕЙН С. Г. — О классах корректности для некоторых граничных задач. ДАН СССР, 114, 6 (1957).
90. КРУКОВСКИЙ Н. М. — Об устойчивом по Тихонову суммировании рядов Фурье с возмущенными коэффициентами некоторыми регулярными методами. Вестник МГУ, Сер. I, Математика, механика, 3 (1973).
91. КРЯНЕВ А. В. — Решение некорректно поставленных задач методом последовательных приближений. ДАН СССР, 210, 1 (1973).
92. КРЯНЕВ А. В. — Итерационный метод решения некорректных задач. ЖВМ и МФ. 14, 1 (1974).
94. ЛАВРЕНТЬЕВ М. М. — О задаче Коши для уравнения Лапласа. Изв. АН СССР, Сер. матем., 20 (1956).
95. ЛАВРЕНТЬЕВ М. М. — К вопросу об обратной задаче теории потенциала. ДАН СССР, 106, 3 (1956).
96. ЛАВРЕНТЬЕВ М. М. — О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений. ДАН СССР, 112, 2 (1957).
97. ЛАВРЕНТЬЕВ М. М. — Об интегральных уравнениях первого рода. ДАН СССР, 127, 1 (1959).
98. ЛАВРЕНТЬЕВ М. М. — Об интегральных уравнениях первого рода. ДАН СССР, 133, 2 (1960).
99. ЛАВРЕНТЬЕВ М. М. — О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд-во СО АН СССР, 1962.
100. ЛАВРЕНТЬЕВ М. М., ВАСИЛЬЕВ В. Г. — О постановке некоторых некорректных задач математической физики. Сибирский математ. журн., VII, 3 (1966).
101. ЛАВРЕНТЬЕВ М. М. — Об обратной задаче для волнового уравнения. ДАН СССР, 157, 3 (1964).
102. ЛАВРЕНТЬЕВ М. М. — Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 160, 1 (1965).
103. ЛАВРЕНТЬЕВ М. М., РОМАНОВ В. Г., ВАСИЛЬЕВ В. Г. — Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, « Наука », 1969.
105. ЛЕБЕДЕВ В. И. — О решении на компактных множествах некоторых задач восстановления. ЖВМ и МФ, 6, 6 (1966).
106. ЛИСКОВЕЦ О. А. — Некорректные задачи с замкнутым необратимым оператором, Дифф. уравн., 3, 4 (1967).
107. ЛИСКОВЕЦ О. А. — О регуляризации линейных уравнений в банаховых пространствах, Дифф. уравн., 4, 6 (1968).
108. ЛИСКОВЕЦ О. А. — Метод регуляризации для нелинейных задач с замкнутым оператором. Сибирский матем. журн., XII, 6 (1971).
109. ЛИСКОВЕЦ О. А. — Метод ε-квазирешений для уравнений I рода. Дифф. уравн., 9, 10 (1973).
110. МАРЧУК Г. И., АТАНБАЕВ С. А. — Некоторые вопросы глобальной регуляризации. ДАН СССР, 190, 3 (1970).
111. МАРЧУК Г. И. — О постановке некоторых обратных задач. ДАН СССР, 156, 3 (1964).
112. МАРЧУК Г. И., ВАСИЛЬЕВ В. Г. — О приближенном решении операторных уравнений I рода. ДАН СССР, 195, 4 (1970).
113. МАСЛОВ В. П. — Регуляризация некорректных задач для сингулярных интегральных уравнений. ДАН СССР, 176, 5 (1967).
114. МЕЛЬНИКОВА И. В. — О решении уравнений I рода с замкнутым многозначным оператором. Изв. вузов, Математика, 12 (1971).
115. МОРОЗОВ В. А. — О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации. ЖВМ и МФ 6, 1 (1966).
116. МОРОЗОВ В. А. — О выборе параметра при решении функциональных уравнений методом регуляризации. ДАН СССР, 175, 6 (1967).
117. МОРОЗОВ В. А. — О регуляризирующих семействах операторов. Сб. « Вычисл. матем. и программирование », VIII, М., изд. МГУ, 1967

118. МОРОЗОВ В. А. — О принципе невязки при решении несовместных уравнений методом регуляризации А. Тихонова. ЖВМ и МФ, 13, 5 (1973).
119. МОРОЗОВ В. А. — О вычислении нижних граней функционалов по приближенной информации. ЖВМ и МФ, 13, 4 (1973).
120. МОРОЗОВ В. А. — О принципе оптимальности невязки при приближенном решении уравнений с нелинейными операторами. ЖВМ и МФ, 14, 2 (1974).
121. МОРОЗОВ В. А. — О псевдорешениях. ЖВМ и МФ, 9, 6 (1969).
122. МОРОЗОВ В. А. — Линейные и нелинейные некорректные задачи. Итоги науки и техники. Математический анализ, 11, М., Изд-во ВИНИТИ, 1973.
123. МОРОЗОВ В. А. — О решении методом регуляризации некорректно поставленных задач с нелинейным неограниченным оператором. Дифф. уравн., 6, 8 (1970).
124. МУРАВЬЕВА М. В. — Об оптимальности и предельных свойствах байесовского решения системы линейных алгебраических уравнений. ЖВМ и МФ, 13, 4 (1973).
125. НОВИКОВ П. С. — О единственности обратной задачи теории потенциала. ДАН СССР, 18, 3 (1938).
126. ОСТРОМОГИЛЬСКИЙ А. Х. — О единственности решения некоторых обратных задач. ЖВМ и МФ, 11, 1 (1971).
127. ОХОЦИМСКИЙ Д. Е. — К теории движения ракет. ПММ, 10, 2 (1946).
128. ПЕТРОВ А. П., ХОВАНСКИЙ А. В. — Оценка погрешности решения линейных задач при наличии ошибок в операторах и правых частях уравнений. ЖВМ и МФ, 14, 2 (1974).
129. ПЕТРОВ В. В., УСКОВ А. С. — Информационные аспекты проблемы регуляризации. ДАН СССР, 195, 4 (1970).
130. ПЕРЕЛЬМАН А. Я., ПУНИНА В. А. — Применение свертки Меллина к решению интегральных уравнений I рода с ядром, зависящим от произведения. ЖВМ и МФ, 9, 3 (1969).
131. ПРИЛЕПКО А. И. — Внешняя обратная задача объемного потенциала переменной плотности для тела, близкого к данному. ДАН СССР, 185, 1 (1969).
132. ПРИЛЕПКО А. И. — Внутренние обратные задачи теории потенциала. ДАН СССР, 182, 3 (1968).
133. ПРИЛЕПКО А. И. — Контактные обратные задачи обобщенных магнитных потенциалов. ДАН СССР, 181, 5 (1968).
134. ПРИЛЕПКО А. И. — О единственности определения формы и плотности тела в обратных задачах теории потенциала. ДАН СССР, 193, 2 (1970).
135. ПРИЛЕПКО А. И. — Об единственности определения формы тела по значениям внешнего потенциала. ДАН СССР, 160, 1 (1965).
136. ПРИЛЕПКО А. И. — Об единственности решения одной обратной задачи, представленной интегральным уравнением первого рода. ДАН СССР, 167, 4 (1966).
137. ПРИЛЕПКО А. И. — Существование решений обратных задач теории потенциала. ДАН СССР, 199, 1 (1971).
138. ПРИЛЕПКО А. И. — Внутренние обратные задачи обобщенных потенциалов. Сибирский матем. журн., 12, 3 (1971).
139. ПРИЛЕПКО А. И. — Об обратных задачах теории потенциала. Дифф. уравн., 3, 1 (1967).
140. ПРИЛЕПКО А. И. — Внутренняя обратная задача метагармонического потенциала для тела, близкого к данному. Дифф. уравн., 8, 1 (1972).
141. РОМАНОВ В. Г. — Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск, « Наука », 1972.
142. РОМАНОВ В. Г. — Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, изд. НГУ, 1973.

143. РОМАНОВ В. Г. — Абстрактная обратная задача и вопросы ее корректности. Функц. анализ, 7, 3 (1973).
144. САВЕЛОВА Т. И., ТИХОМИРОВ В. В. — О решении интегральных уравнений I рода типа свертки в многомерном случае. ЖВМ и МФ, 13, 3 (1973).
145. САВЕЛОВА Т. И. — О решении уравнений типа свертки с неточно заданным ядром методом регуляризации. ЖВМ и МФ, 12, 1 (1972).
146. САВЕЛОВА Т. И. — О применении одного класса регуляризирующих алгоритмов к решению интегральных уравнений I рода типа свертки в банаховых пространствах. ЖВМ и МФ, 14, 2 (1974).
147. САВЕЛОВА Т. И. — Проекционные методы решения линейных некорректных задач. ЖВМ и МФ, 14, 4 (1974).
148. СТРАХОВ В. Н. — О решении некорректных задач магнито- и гравиметрии, представляемых интегральными уравнениями типа свертки. Изв. АН СССР, Сер. Физика Земли, 4, 5 (1967).
149. СТРАХОВ В. Н. — О численном решении некорректных задач, представляемых интегральными уравнениями типа свертки. ДАН СССР, 178, 2 (1968).
150. СТРАХОВ В. Н. — О линейных некорректных задачах в гильбертовом пространстве. Дифф. уравн., 6, 8 (1970).
151. СТРАХОВ В. Н. — О методе последовательных приближений для линейных уравнений в гильбертовом пространстве. ЖВМ и МФ, 13, 4 (1973).
152. СТРАХОВ В. Н. — О построении оптимальных по порядку приближенных решений линейных условно корректных задач. Дифф. уравн., 11, 10 (1973).
153. СТРАХОВ В. Н. — К вопросу о скорости сходимости в методе простой итерации. ЖВМ и МФ, 13, 6 (1973).
154. ТАНАНА В. П. — Приближенное решение операторных уравнений первого рода в локально выпуклых пространствах. Изв. вузов, Математика, 9 (1973).
155. ТИХОНОВ А. Н. — Об устойчивости обратных задач. ДАН СССР, 39, 5 (1943).
156. ТИХОНОВ А. Н. — О решении некорректно поставленных задач. ДАН СССР, 151, 3 (1963).
157. ТИХОНОВ А. Н. — О регуляризации некорректно поставленных задач. ДАН СССР, 153, 1 (1963).
158. ТИХОНОВ А. Н. — Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье. ДАН СССР, 156, 1 (1964).
159. ТИХОНОВ А. Н. — О решении нелинейных интегральных уравнений. ДАН СССР, 156, 6 (1964).
160. ТИХОНОВ А. Н., ГЛАСКО В. Б. — О приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма первого рода. ЖВМ и МФ, 4, 3 (1964).
161. ТИХОНОВ А. Н. — О нелинейных уравнениях первого рода. ДАН СССР, 161, 5 (1965).
162. ТИХОНОВ А. Н., АРСЕНИН В. Я., ВЛАДИМИРОВ Л. А., ДОРОШЕНКО Г. Г., ДУМОВА А. А. — К вопросу об обработке аппаратурных спектров γ-квантов и быстрых нейтронов, измеренных с помощью однокристальных сцинтилляционных спектрометров. Изв. АН СССР, Сер. физическая, XXIX, 5 (1965).
163. ТИХОНОВ А. Н. — О методах регуляризации задач оптимального управления. ДАН СССР, 162, 4 (1965).
164. ТИХОНОВ А. Н., АРСЕНИН В. Я., ДУМОВА А. А., МАЙОРОВ Л. В., МОСТОВОЙ В. И. — Новый метод восстановления истинных спектров. Атомная энергия, 18, 6 (1965).
165 ТИХОНОВ А. Н., ГЛАСКО В. Б. — Применение методов регуляризации в нелинейных задачах. ЖВМ и МФ, 5, 3 (1965).

166. ТИХОНОВ А. Н. — О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения. ДАН СССР, 163, 6 (1965).
167. ТИХОНОВ А. Н. — Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений. ЖВМ и МФ, 5, 4 (1965).
168. ТИХОНОВ А. Н. — О некорректных задачах оптимального планирования и устойчивых методах их решения. ДАН СССР, 164, 3 (1965).
169. ТИХОНОВ А. Н. — О методах решения некорректно поставленных задач. Тезисы докладов, Международный конгресс математиков, М., 1966.
170. ТИХОНОВ А. Н. — О некорректных задачах оптимального планирования. ЖВМ и МФ, 6, 1 (1966).
171. ТИХОНОВ А. Н. — Об устойчивости задачи минимизации функционалов. ЖВМ и МФ, 6, 4 (1966).
172. ТИХОНОВ А. Н., ГАЛКИН В. Я., ЗАИКИН П. Н. — О прямых методах решения задач оптимального управления. ЖВМ и МФ, 7, 2 (1967).
173. ТИХОНОВ А. Н., ГЛАСКО В. Б. — К вопросу о методах определения температуры поверхности тел. ЖВМ и МФ, 7, 4 (1967).
174. ТИХОНОВ А. Н. — О некорректно поставленных задачах. Сб. « Вычисл. матем. и программирование », VIII, изд. МГУ, 1967.
175. ТИХОНОВ А. Н., АЛИКАЕВ В. В., АРСЕНИН В. Я., ДУМОВА А. А. — Определение функции распределения электронов плазмы по спектру тормозного излучения. Ж. эксп. и теор. физики, 55, 5 (1968).
176. ТИХОНОВ А. Н., ШЕВЧЕНКО В. Г., ГАЛКИН В. Я., ЗАИКИН П. Н., ГОРЯЧЕВ Б. И., ИШХАНОВ Б. С., КАПИТОНОВ И. М. — Система сплошной автоматической обработки результатов эксперимента по исследованию сечений фотоядерных реакций. Сб. « Вычисл. матем. и программирование », XIV, изд. МГУ, 1970.
177. ТИХОНОВ А. Н., ДМИТРИЕВ В. И. — О методах решения обратной задачи теории антенн. Сб. « Вычисл. матем. и программирование », XIII, изд. МГУ, 1969.
178. ТИХОНОВ А. Н., КАРМАНОВ В. Г., РУДНЕВА Т. Л. — Об устойчивости задач линейного программирования. Сб. « Вычисл. матем. и программирование », XII, изд. МГУ, 1969.
179. ТУРЧИН В. Ф. — Решение уравнения Фредгольма I рода в статистическом ансамбле гладких функций. ЖВМ и МФ, 7, 6 (1967).
180. ТУРЧИН В. Ф. — Выбор ансамбля гладких функций при решении обратной задачи. ЖВМ и МФ, 8, 1 (1968).
181. ТУРЧИН В. Ф., КОЗЛОВ В. П., МАЛКЕВИЧ М. С. — Использование методов математической статистики для решения некорректных задач. УФН, 102, 3 (1970).
182. ФРАНК Л. С., ЧУДОВ Л. А. — Разностные методы решения некорректной задачи Коши. Сб. « Вычисл. матем. и программирование », IV, изд. МГУ, 1965.
183. ФРАНК Л. С. — Разностные методы решения задачи Коши для некорректных систем первого порядка. Вестник МГУ, Математика, 1 (1966).
184. ХАЛФИН Л. А., СУДАКОВ В. Н. — Статистический подход к корректности задач математической физики. ДАН СССР, 157, 5 (1964).
185. ХУДАК Ю. И. — О регуляризации решений интегральных уравнений первого рода. ЖВМ и МФ, 6, 4 (1966).
186. ХУДАК Ю. И. — О сходимости одного семейства регуляризирующих операторов. ЖВМ и МФ, 12, 2 (1972).
187. ХУДАК Ю. И. — О сходимости регуляризующих алгоритмов. ЖВМ и МФ, 11, 1 (1971).
188. ЧУДОВ Л. А. — Разностные схемы и некорректные задачи для уравнений с частными производными. Сб. « Вычисл. матем. и программирование », VIII, изд. МГУ, 1967.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse :
Editions Mir, 2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique